

Oscillations mécaniques forcées & Filtrage d'un signal & Diffusion

Oscillations forcées : Oscillations mécaniques

On travaille ici sur quelques exemples d'oscillateurs mécaniques.

Pour cela, toutes les études seront menées dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.

Le vecteur \vec{g} désigne le vecteur-accélération de la pesanteur et on note g sa norme.

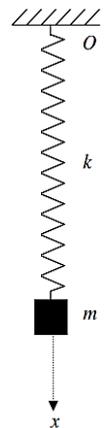
On négligera la poussée d'Archimède dans l'air.

Première partie : Oscillateur harmonique non amorti

Considérons le système représenté ci-dessous : une masse m est suspendue à un ressort vertical de masse négligeable et de raideur k . L'extrémité supérieure du ressort est fixe et attachée au point O .

Soit l'axe (Ox) , vertical et orienté vers le bas. La position de l'extrémité libre du ressort est repérée par son abscisse x .

Soit x_0 la longueur à vide du ressort et $x_{\text{éq}}$ sa longueur lorsque la masse m est accrochée au ressort et est à l'équilibre.



1. Equation différentielle du mouvement

1.1 Etablir le bilan des forces appliquées à la masse m afin de déterminer l'équation différentielle vérifiée par x .

En déduire l'expression de la longueur $x_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre en fonction de x_0 , g , m et k .

1.2 Déterminer l'équation différentielle *homogène* vérifiée par x et liant x , $x_{\text{éq}}$, m et k .

En déduire la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 de l'oscillateur ainsi obtenu.

1.3 A l'instant $t = 0$, la masse m est dans une position telle que la longueur du ressort est égale à $x_{\text{éq}}$. On communique alors à la masse m une vitesse v_0 verticale dirigée vers le bas. Déterminer dans ce cas la solution $x(t)$ de l'équation différentielle.

Deuxième partie : Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

La masse m du système de la partie précédente est une sphère homogène de masse volumique ρ et de rayon R faible.

Lorsque cette sphère est animée d'une vitesse \vec{v} et plongée dans un liquide de coefficient de viscosité dynamique η , elle est soumise, de la part du fluide, en plus de la poussée d'Archimède, à une force de frottement \vec{f} donnée par la loi de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$.

On négligera les interactions éventuelles entre le ressort et le liquide.

Pour simplifier les expressions, on notera V le volume de la sphère.

2. Période de l'oscillateur non amorti

En l'absence de frottement et de poussée d'Archimède (dans le vide ou dans l'air), les oscillations libres de la sphère ont une pulsation propre ω_1 . En utilisant les résultats de la partie précédente, déterminer l'expression de ω_1 en fonction de k , V et ρ .

Dans la suite de cette deuxième partie, la sphère est totalement immergée dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ . On considèrera, de plus, que la sphère est entièrement immergée dans le liquide quelle que soit la position de l'oscillateur.

3. Détermination de la masse volumique du liquide

Lorsque la sphère est totalement immergée dans le liquide et est à l'équilibre, la longueur du ressort est égale à $x_{\text{éq}}'$.

Faire le bilan des forces appliquées à la masse m .

Déterminer l'expression de la masse volumique ρ_ℓ du liquide en fonction de ρ , $x_{\text{éq}}'$, V , g , x_0 et k .

4. Oscillations pseudopériodiques de la sphère immergée dans le liquide

4.1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la longueur x du ressort à un instant quelconque t au cours du mouvement.

Utiliser l'expression de la masse volumique ρ_ℓ du liquide déterminée à la question précédente, afin d'écrire l'équation différentielle vérifiée par x en utilisant les grandeurs x , $x_{\text{éq}}'$, ρ , V , R , k et η .

4.2 A quelle condition portant sur k , constante de raideur du ressort, le mouvement de la sphère est-il pseudopériodique ? On exprimera la condition sous la forme $k > k_0$ où k_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de η , R , V et ρ .

Déterminer dans ce cas la pseudo-pulsation ω_2 des oscillations en fonction de k_0 , k , ρ et V .

5. Détermination du coefficient de viscosité du liquide

On considère dans cette question que la condition sur k pour avoir des oscillations pseudo-périodiques est satisfaite. En utilisant les expressions de ω_1 et ω_2 déterminées précédemment, donner l'expression du coefficient de viscosité dynamique η du liquide en fonction de R , V , ρ , ω_1 et ω_2 .

Troisième partie : Oscillations forcées

La sphère est de nouveau mise dans l'air mais elle est maintenant soumise à une excitation extérieure sinusoïdale de pulsation ω donnée par : $\vec{F}(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$ avec $F_0 > 0$.
 \vec{e}_x est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses x .

On estime que la sphère subit une force de frottement \vec{f} telle que : $\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}$.

On note $X = x - x_{\text{éq}}''$ la position de la masse m par rapport à sa position d'équilibre dans l'air telle que $x_{\text{éq}}'' = x_0 + \frac{(\rho V) \cdot g}{k}$.

6. Dans ce cas, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_1}{Q} \dot{X} + \omega_1^2 X = \frac{F_0 \cdot \cos(\omega t)}{\rho V}$$

Préciser les expressions de Q et ω_1 en fonction de ρ , V , k et λ .

En régime permanent, les oscillations forcées sont telles que $X = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec A et φ deux constantes.

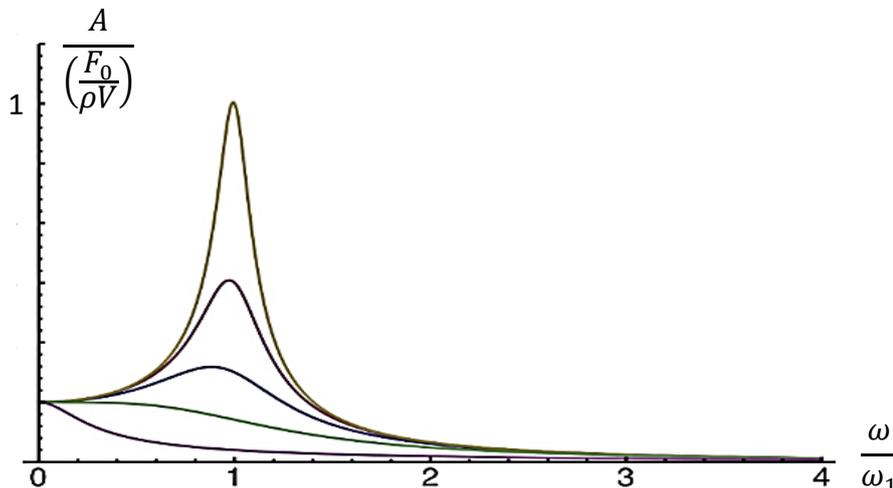
7. Régime permanent

7.1 Que représente A ? Déterminer son expression en fonction de F_0 , ρ , V , Q , ω et ω_1 .

7.2 Que représente φ ? Déterminer son expression en fonction de Q , ω et ω_1 .

8. Résultats expérimentaux

Plusieurs expériences réalisées pour choisir au mieux les paramètres de l'oscillateur donnent les courbes de la figure ci-dessous.



Amplitude du régime permanent en fonction du rapport de pulsation ω/ω_1 pour différentes valeurs du facteur de qualité : de bas en haut $Q = 0,35 ; 0,70 ; 1,25 ; 2,50$ et $4,20$.

8.1 Qualifier le phénomène observé pour un facteur de qualité supérieur à 1.

8.2 Déterminer l'expression de la pulsation ω_r pour laquelle le maximum est atteint.

8.3 Retrouver les valeurs de $\left[\frac{A}{\left(\frac{F_0}{\rho V} \right)} \right]$ lorsque la pulsation de ω tend vers 0 et vers $+\infty$.

8.4 Comment évolue l'acuité de la résonance en fonction des frottements ?

On considère le dispositif représenté par la figure n° 1.
Le condensateur est initialement déchargé.

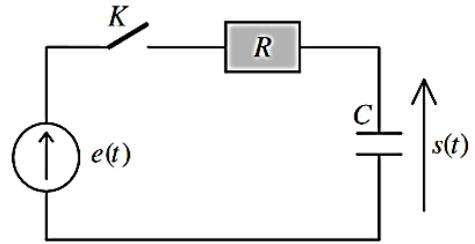


Figure n°1

1. On ferme l'interrupteur (K) à la date $t = 0$.
Écrire l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$. On supposera que $e(t) = E = \text{constante}$.
2. L'intégrer en considérant le condensateur déchargé à $t = 0$. On posera $\tau = RC$.
Représenter l'allure de $s(t)$.

3. Donner l'expression de l'intensité du circuit $i(t)$.

4. On considère maintenant le montage de la figure 2.

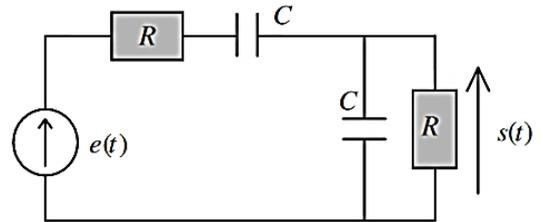


Figure n°2

4.1. Montrer que $s(t)$ satisfait à l'équation différentielle : $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau^2} = 0$

4.2. Donner l'expression de $s(t)$. Les condensateurs ne sont pas chargés à la date $t = 0$.

On posera : $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$; toujours avec $\tau = RC$.

5. On considère toujours le montage de la figure 2 mais à présent, la source de tension est sinusoïdale, soit $e(t) = E_m \cdot \sin(\omega_0 t)$.

5.1. Proposer un spectre en pulsation de cette tension sinusoïdale.

5.2. On admet, en notation complexe, que la *résistance* du condensateur équivaut à « $\frac{1}{jC\omega}$ » (on parle d'impédance). Déterminer la résistance complexe équivalente de tout le circuit en fonction de R , τ et ω .

5.3. En déduire la fonction de transfert complexe : $\underline{H} = \frac{j\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2 + 3j\tau\omega}$.

5.4. On pose : $\underline{H} = H \cdot e^{j\varphi}$ où H est le module de la fonction de transfert complexe et φ son argument. Donner les expressions de H et de φ en fonction de τ et de ω .

5.5. Préciser la nature du filtre.

5.6. Tracer la courbe de réponse en gain en faisant bien apparaître la bande-passante après avoir donné sa définition.

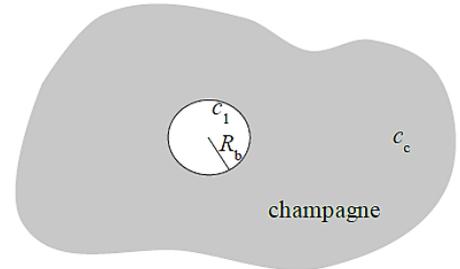
Transport par diffusion : Croissance d'une bulle

Dans un verre de champagne, on observe des chapelets de bulles au sein de la boisson. Leur apparition est principalement due à la présence de fibres de cellulose provenant de particules en suspension dans l'air ou du chiffon utilisé pour essuyer la flûte. Ces fibres de cellulose possèdent une cavité qui renferme de l'air. Les molécules de CO_2 dissous en phase aqueuse vont diffuser vers la poche d'air. Celle-ci va grossir jusqu'à atteindre une extrémité de la poche et former alors une bulle.

Une fois la bulle formée, elle se détache de la fibre et monte dans le liquide dans lequel elle va grossir. Nous allons étudier cette augmentation de taille. Quand elle se détache de la fibre, la pression au sein de la bulle est égale à 1 bar. La bulle est supposée sphérique de rayon R_b .

On considère que la concentration en CO_2 dissous vaut $c_c = 12 \text{ g. L}^{-1}$ loin de la bulle et $c_1 = 1,3 \text{ g. L}^{-1}$ pour $r = R_b$. On suppose dans un premier temps que R_b est constant et on se place en régime stationnaire.

On donne la masse molaire du dioxyde de carbone : $M = 44 \text{ g. mol}^{-1}$ et la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J. K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.



1. Justifier qu'un flux ϕ de dioxyde de carbone se met en place au sein du champagne liquide et montrer que ce flux se conserve.
2. Donner la loi de Fick dans le contexte étudié en précisant la signification physique des différents termes ainsi que leurs unités. On notera $n^*(r)$ la concentration particulière du CO_2 , r étant la distance au centre de la bulle avec $r > R_b$ et D , le coefficient de diffusion du dioxyde de carbone dans le champagne liquide.

Dans les questions suivantes, on introduit la constante d'Avogadro N_A .

3. Donner la relation entre la concentration en masse de CO_2 en solution c , n^* , N_A et la masse molaire M du dioxyde de carbone.
4. Montrer que la concentration en masse $c(r)$ au sein du champagne liquide vérifie l'équation :
$$\frac{dc}{dr} = \frac{A}{4\pi \cdot D \cdot r^2} \quad \text{où } A \text{ est une constante que l'on exprimera en fonction } \phi, N_A \text{ et } M.$$
5. Établir l'expression suivante de $c(r)$: $c(r) = (c_1 - c_c) \frac{R_b}{r} + c_c$ pour $r > R_b$.

Le régime n'est en réalité pas stationnaire. Nous utiliserons néanmoins l'expression trouvée dans la question 5. en prenant en compte le fait que le rayon $R_b(t)$ dépend du temps.

6. En supposant que toutes les molécules de CO_2 arrivant à la surface de la bulle y pénètrent, montrer que le flux moléculaire, qui s'identifie au taux de variation $\phi = \frac{dN_g}{dt}$ du nombre N_g de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle, admet comme expression $\frac{dN_g}{dt} = \frac{N_A P}{RT} \frac{dV}{dt}$, où P et T sont la pression et la température de la bulle supposées constantes, et $\frac{dV}{dt}$ le taux de variation du volume.
7. En déduire la relation : $R_b \frac{dR_b}{dt} = \frac{(c_c - c_1) D R T}{P M}$ dont on vérifiera l'homogénéité.
8. On néglige le volume initial de la bulle, de sorte que $R_b(t = 0) \approx 0$. En déduire $R_b(t)$.
9. On donne en plus des valeurs numériques précédentes : $D = 3.10^{-9} \text{ S. I.}$ Calculer en ms la durée Δt mise par une bulle pour atteindre un rayon de $10 \mu\text{m}$ à une température de $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Oscillations forcées :**Oscillations mécaniques****D'après CCPTSI08****(1h15)**

- 1.1. Bilan des forces appliquées à la masse m :
- poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
 - force de rappel du ressort : $\vec{F}_k = -k \cdot (x - x_0) \cdot \vec{e}_x$
 - on néglige la poussée d'Archimède dans l'air.

Dans un référentiel supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique donne : $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$

D'où : $m \cdot \vec{g} - k \cdot (x - x_0) \cdot \vec{e}_x = m \cdot g \cdot \vec{e}_x - k \cdot (x - x_0) \cdot \vec{e}_x = m \cdot \vec{a}$

Sur Ox : $m \cdot g - k \cdot (x - x_0) = m \cdot a_x = m \cdot \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) \cdot x = g + \frac{k}{m} \cdot x_0$

A l'équilibre, l'accélération est nulle : $\left(\frac{k}{m}\right) \cdot x_{\text{éq}} = g + \frac{k}{m} \cdot x_0$ soit $x_{\text{éq}} = \frac{m}{k} \cdot g + x_0$

1.2. $\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) \cdot x = g + \frac{k}{m} \cdot x_0 = \left(\frac{k}{m}\right) \cdot x_{\text{éq}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right) \cdot x = \left(\frac{k}{m}\right) \cdot x_{\text{éq}}$

Soit : $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \omega_0^2 \cdot x_{\text{éq}}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$

- 1.3. La solution de l'équation différentielle est de la forme : $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{éq}}$

Avec les conditions initiales :

$$\left. \begin{aligned} x(t=0) &= A \cdot \cos(\varphi) + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}} \\ \dot{x}(t=0) &= -A\omega_0 \cdot \sin(\varphi) = v_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \varphi &= -\frac{\pi}{2} \\ A &= \frac{v_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

Soit : $x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right) \cdot \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + x_{\text{éq}}$

2. En l'absence de frottement et de poussée d'Archimède :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{\rho \cdot V}}$$

3. Bilan des forces appliquées à la masse m :
- poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
 - force de rappel du ressort : $\vec{F}_k = -k \cdot (x - x_0) \cdot \vec{e}_x$
 - poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho_\ell \cdot V \cdot \vec{g}$
 - la force de frottement : $\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v}$

A l'équilibre, dans un référentiel galiléen : $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ & $\vec{v} = \vec{0}$

D'où : $m \cdot \vec{g} - k \cdot (x_{\text{éq}}' - x_0) \cdot \vec{e}_x - \rho_\ell \cdot V \cdot \vec{g} = \vec{0}$

Sur Ox : $(\rho \cdot V) \cdot g - k \cdot (x_{\text{éq}}' - x_0) - \rho_\ell \cdot V \cdot g = 0 \Rightarrow \rho_\ell = \rho - \frac{k}{V \cdot g} \cdot (x_{\text{éq}}' - x_0)$

- 4.1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, le référentiel étant supposé galiléen :

$$m \cdot \vec{g} - k \cdot (x - x_0) \cdot \vec{e}_x - \rho_\ell \cdot V \cdot \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{v} = m \cdot \vec{a}$$

Sur Ox : $+(\rho \cdot V) \cdot g - k \cdot (x - x_0) - \rho_\ell \cdot V \cdot g - 6\pi\eta R \cdot \dot{x} = (\rho \cdot V) \cdot \ddot{x}$

Soit : $\ddot{x} + \frac{6\pi\eta R}{\rho \cdot V} \cdot \dot{x} + \frac{k}{\rho \cdot V} \cdot x = g + \frac{(k \cdot x_0 - \rho_\ell \cdot V \cdot g)}{\rho \cdot V} = g + \frac{k \cdot x_0}{\rho \cdot V} - \frac{\rho_\ell \cdot g}{\rho} = g + \frac{k \cdot x_0}{\rho \cdot V} - \frac{\left(\rho - \frac{k}{V \cdot g} \cdot (x_{\text{éq}}' - x_0)\right) \cdot g}{\rho}$

$$\ddot{x} + \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho \cdot V}\right) \cdot \dot{x} + \left(\frac{k}{\rho \cdot V}\right) \cdot x = g + \frac{k \cdot x_0}{\rho \cdot V} - \frac{\left(\rho - \frac{k}{V \cdot g} \cdot (x_{\text{éq}}' - x_0)\right) \cdot g}{\rho} = \left(\frac{k}{\rho \cdot V}\right) \cdot x_{\text{éq}}'$$

4.2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène est :

$$r^2 + \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho.V}\right).r + \left(\frac{k}{\rho.V}\right) = 0$$

Le mouvement est pseudo-périodique si le discriminant est négatif soit : $\Delta = \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho.V}\right)^2 - 4.\left(\frac{k}{\rho.V}\right) < 0$

$$\Rightarrow \frac{\rho.V}{4} \cdot \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho.V}\right)^2 < k \quad \text{Soit} \quad \boxed{k_0 < k} \quad \text{avec} \quad \boxed{k_0 = \frac{\rho.V}{4} \cdot \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho.V}\right)^2}$$

Les solutions sont alors : $r_{1,2} = \frac{-\left(\frac{6\pi\eta R}{\rho.V}\right) \pm \sqrt{-\Delta}}{2}$ avec la pseudo-pulsation $\omega_2 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

$$\text{Soit : } \omega_2 = \frac{\sqrt{-\left(\frac{6\pi\eta R}{\rho.V}\right)^2 + 4.\left(\frac{k}{\rho.V}\right)}}{2} = \frac{\sqrt{-\frac{4}{\rho.V}k_0 + 4.\left(\frac{k}{\rho.V}\right)}}{2} = \boxed{\sqrt{\left(\frac{k-k_0}{\rho.V}\right)}} = \omega_2$$

$$5. \quad \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{k-k_0}{\rho.V}\right)} \quad \Rightarrow \quad \omega_2^2 = \left(\frac{k-k_0}{\rho.V}\right) = \left(\frac{k}{\rho.V}\right) - \left(\frac{k_0}{\rho.V}\right) = \omega_1^2 - \left(\frac{\left[\frac{\rho.V}{4} \cdot \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho.V}\right)^2\right]}{\rho.V}\right)$$

$$\text{D'où : } \left(\frac{\left[\frac{\rho.V}{4} \cdot \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho.V}\right)^2\right]}{\rho.V}\right) = \omega_1^2 - \omega_2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = \sqrt{4.(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \times \frac{\rho.V}{6\pi R}}$$

6. Bilan des forces appliquées à la masse m :
- poids : $\vec{P} = +(\rho V).g.\vec{e}_x$
 - force de rappel du ressort : $\vec{F}_k = -k.(x - x_0).\vec{e}_x$
 - la force de frottement : $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda v.\vec{e}_x$
 - la force d'excitation : $\vec{F}(t) = F_0.\cos(\omega t).\vec{e}_x$

Hors équilibre, dans un référentiel galiléen : $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \rho V.\vec{a}$

$$(\rho V).g.\vec{e}_x - k.(x - x_0).\vec{e}_x - \lambda.v.\vec{e}_x + F_0.\cos(\omega t).\vec{e}_x = (\rho V).\vec{a}$$

Sur Ox : $(\rho.V).g - k.(x - x_0) - \lambda.\dot{x} + F_0.\cos(\omega t) = (\rho.V).\ddot{x}$

$$\text{Soit : } \ddot{x} + \left(\frac{\lambda}{\rho.V}\right).\dot{x} + \left(\frac{k}{\rho.V}\right).x = \left(\frac{k}{\rho.V}\right).x_0 + g + \frac{F_0.\cos(\omega t)}{\rho.V} = \left(\frac{k}{\rho.V}\right).x_{\text{éq}}'' + \frac{F_0.\cos(\omega t)}{\rho.V}$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{\lambda}{\rho.V}\right).\dot{x} + \left(\frac{k}{\rho.V}\right).(x - x_{\text{éq}}'') = \frac{F_0.\cos(\omega t)}{\rho.V}$$

En posant : $X = x - x_{\text{éq}}'' \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = \dot{x} \quad \& \quad \ddot{X} = \ddot{x}$

$$\text{D'où : } \boxed{\ddot{X} + \left(\frac{\lambda}{\rho.V}\right).\dot{X} + \left(\frac{k}{\rho.V}\right).X = \frac{F_0.\cos(\omega t)}{\rho.V} = \ddot{X} + \left(\frac{\omega_1}{Q}\right).\dot{X} + (\omega_1^2).X}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{\rho V}}} \quad \& \quad \boxed{Q = \frac{\omega_1}{\left(\frac{\lambda}{\rho V}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{k}{\rho V}}}{\left(\frac{\lambda}{\rho V}\right)} = \frac{\sqrt{k\rho V}}{\lambda}}$$

7.1. A représente l'amplitude des oscillations.

Avec la notation complexe : $X = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \underline{X} = A.e^{j(\omega t + \varphi)} = (A.e^{j\varphi}).e^{j\omega t} = \underline{A}.e^{j\omega t}$

L'équation différentielle devient : $\underline{\ddot{X}} + \left(\frac{\omega_1}{Q}\right).\underline{\dot{X}} + \omega_1^2.\underline{X} = \frac{F_0}{\rho V}.e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow -\omega^2.\underline{X} + j\omega\left(\frac{\omega_1}{Q}\right).\underline{X} + \omega_1^2.\underline{X} = \frac{F_0}{\rho V}.e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \underline{A}.e^{j\omega t} \times [-\omega^2 + j\omega\left(\frac{\omega_1}{Q}\right) + \omega_1^2] = \frac{F_0}{\rho V}.e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{\left(\frac{F_0}{\rho V}\right)}{(\omega_1^2 - \omega^2) + j\omega_1\omega/Q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = |\underline{A}| = |A.e^{j\varphi}| = \frac{\left(\frac{F_0}{\rho V}\right)}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_1^2\omega^2}{Q^2}}}$$

7.2. φ représente le déphasage entre l'excitation et la réponse de l'oscillateur.

$$\underline{A} = A.e^{j\varphi} = \frac{\left(\frac{F_0}{\rho V}\right)}{(\omega_1^2 - \omega^2) + j\omega_1\omega/Q} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arg(\underline{A}) = \arg\left(\frac{\left(\frac{F_0}{\rho V}\right)}{(\omega_1^2 - \omega^2) + j\omega_1\omega/Q}\right) = 0 - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_1\omega}{Q}}{(\omega_1^2 - \omega^2)}\right) = \varphi$$

8.1. L'amplitude des oscillations peut être très élevée : on parle du phénomène de résonance.

8.2. L'amplitude est maximale si le dénominateur de son expression est minimal (le numérateur étant constant), on cherche donc pour quelle pulsation ω_r , sa dérivée s'annule :

$$\frac{d\left(\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_1^2 \omega^2}{Q^2}}\right)}{d\omega} = \frac{-2.2\omega \cdot (\omega_1^2 - \omega^2) + \frac{\omega_1^2}{Q^2} \cdot 2\omega}{2 \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_1^2 \omega^2}{Q^2}}} \Rightarrow -2.2\omega_r \cdot (\omega_1^2 - \omega_r^2) + \frac{\omega_1^2}{Q^2} \cdot 2\omega_r = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{\omega_1^2}{2Q^2}} = \omega_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} > 0 \text{ avec } \omega_r \neq 0$$

8.3. $\frac{A}{\left(\frac{F_0}{\rho V}\right)} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_1^2 \omega^2}{Q^2}}}$

Si $\omega \rightarrow 0$: $\frac{A}{\left(\frac{F_0}{\rho V}\right)} \rightarrow \frac{1}{\omega_1^2}$

Si $\omega \rightarrow +\infty$: $\frac{A}{\left(\frac{F_0}{\rho V}\right)} \rightarrow 0$

8.4. Plus la bande passante est étroite, plus l'acuité de la résonance est élevée. C'est le cas si le facteur de qualité est grand comme le met en évidence le graphique donc si les frottements sont faibles ($Q = \frac{\sqrt{k\rho V}}{\lambda}$).

Filtrage d'un signal : Etude d'un circuit RC G2E05-Agro20 (40min)

1. Avec la loi des mailles : $e(t) = u_R + s(t) = R \cdot i + s(t) = RC \cdot \frac{ds}{dt} + s \Rightarrow \frac{ds}{dt} + \left(\frac{1}{RC}\right) \cdot s = \left(\frac{E}{RC}\right)$

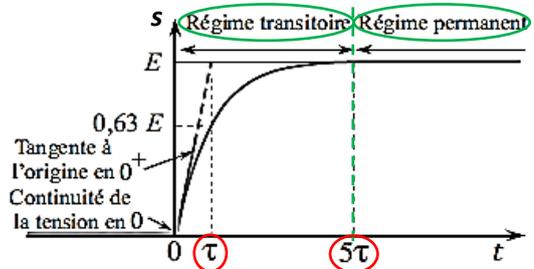
2. La solution de l'ED du 1^{er} ordre avec 2nd membre donne :

$$s(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E$$

Avec la condition initiale (condensateur non chargé) :

$$s(0) = 0 = \alpha + E$$

$$\Rightarrow s(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



3. $i(t) = \frac{u_R}{R} = \frac{E - s(t)}{R} = \frac{E - E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{R} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

OU $i(t) = C \cdot \frac{ds}{dt} = C \cdot \frac{d\left(E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right)}{dt} = C \cdot \left(+E \cdot \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

4.1. Avec la loi des nœuds : $i = i_R + i_C = \frac{s}{R} + C \cdot \frac{ds}{dt}$

Avec la loi des mailles : $E = Ri + u_C + s = R \cdot \left(\frac{s}{R} + C \cdot \frac{ds}{dt}\right) + u_C + s$

En dérivant : $0 = R \cdot \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} + C \cdot \frac{d^2s}{dt^2}\right) + \frac{du_C}{dt} + \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} + RC \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{i}{C}\right) + \frac{ds}{dt}$

$$\Rightarrow 0 = RC \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + 2 \cdot \frac{ds}{dt} + \left(\frac{1}{C} \times \left(\frac{s}{R} + C \cdot \frac{ds}{dt}\right)\right) = RC \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + 3 \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot s$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{RC} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} \cdot s = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau^2} \cdot s \quad \text{avec } \tau = \frac{1}{RC}$$

4.2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est : $r^2 + \left(\frac{3}{\tau}\right) \cdot r + \frac{1}{\tau^2} = 0$

Le discriminant vaut : $\Delta = \left(\frac{3}{\tau}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2} > 0$

Il y a 2 solutions réelles : $r_{1,2} = \frac{-\frac{3}{\tau} \pm \sqrt{\frac{5}{\tau^2}}}{2} = \frac{-\frac{3}{\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{\tau}}{2} = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau} = -\frac{3}{2\tau} \pm \lambda$

D'où : $s(t) = \alpha \cdot e^{r_1 \cdot t} + \beta \cdot e^{r_2 \cdot t} = e^{-\frac{3}{2\tau} \cdot t} \cdot (\alpha \cdot e^{\lambda t} + \beta \cdot e^{-\lambda t})$

Avec les conditions initiales : $s(0) = 0 = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = -\alpha$

$I_R(0) = 0 \Rightarrow i(0) = i_C(0) = C \cdot \frac{ds}{dt}(0) = \frac{E}{R}$

$\frac{E}{RC} = -\frac{3}{2\tau} \cdot (\alpha - \alpha) + (\alpha\lambda + \alpha\lambda) = 2\alpha\lambda$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = \left(\frac{E}{\sqrt{5}}\right) \cdot e^{-\frac{3}{2\tau} \cdot t} \cdot (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) = \left(\frac{E}{RC}\right) \cdot \frac{1}{2\lambda} \cdot e^{-\frac{3}{2\tau} \cdot t} \cdot (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})}$$

5.1. Le signal est **sinusoïdal**, il ne présente qu'un **seul harmonique**, le fondamental.



5.2. Par association en parallèle et en série de résistances :

$$R_{\text{éq}} = R_R + R_C + R_{//} = R + \frac{1}{jC\omega} + R_{//} = R + \frac{1}{jC\omega} + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_C}}\right) = R + \frac{1}{jC\omega} + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}\right) = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega} + \left(\frac{R}{1 + jRC\omega}\right)$$

$$\boxed{R_{\text{éq}} = \frac{jR^2C\omega + R}{jRC\omega} + \left(\frac{R}{1 + jRC\omega}\right) = \frac{R + jR\tau\omega}{j\tau\omega} + \left(\frac{R}{1 + j\tau\omega}\right)}$$

5.3. Avec le pont diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{R_{//}}{R_{\text{éq}}} = \frac{\left(\frac{R}{1 + j\tau\omega}\right)}{\frac{R + jR\tau\omega}{j\tau\omega} + \left(\frac{R}{1 + j\tau\omega}\right)}$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\left(\frac{R}{1 + j\tau\omega}\right)}{\frac{(R + jR\tau\omega) \cdot (1 + j\tau\omega) + R \cdot j\tau\omega}{j\tau\omega \cdot (1 + j\tau\omega)}} = \frac{R}{(R + jR\tau\omega) \cdot (1 + j\tau\omega) + R \cdot j\tau\omega} = \frac{j\tau\omega}{R + 2jR\tau\omega - R\tau^2\omega^2 + R \cdot j\tau\omega} = \boxed{\frac{j\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2 + 3j\tau\omega} = \underline{H}}$$

$$5.4. \quad \mathbf{H} = |\mathbf{H}| = \frac{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 0^2}}{\sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (3\tau\omega)^2}} = \boxed{\frac{\tau\omega}{\sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + 9\tau^2\omega^2}} = H}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arg}(\mathbf{H}) = \boxed{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2}\right) = \varphi}$$

5.5. $G(\omega \rightarrow 0) = 0$

$G(\omega \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$ Les basses et hautes fréquences sont éliminées : c'est **filtre passe-bande**.

5.6. La **bande-passante** correspond à l'intervalle de pulsations ω transmises c'est-à-dire telles que :

$$G(\omega) \geq \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad \text{avec } G_{\text{max}} = 1/3 :$$

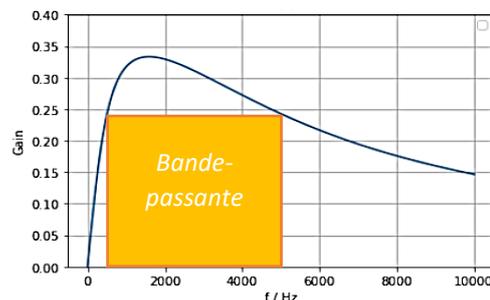


Figure 1 - Réponse en gain

1. Le CO₂ proche de la bulle diffuse dans la poche d'air. La concentration en CO₂ dissous proche de la poche d'air est donc inférieure à celle loin de la bulle : $c_c > c_1$.
Le gradient de concentration induit donc un flux CO₂, dans le sens opposé au gradient, vers la poche d'air.

Système : { les molécules CO₂ compris entre r et $r + dr$ avec $r > R_b$ } ouvert

On se ramène à un système fermé

Soit le système fermé constitué par

{ N molécules CO₂ contenu dans le volume ($\Sigma_o + \Sigma_e$) à l'instant t
qui **diffuse** dans ($\Sigma_o + \Sigma_s$) à l'instant $t+dt$ }

$$N_{\text{fermé}}(t) = N_{\Sigma_o}(t) + \delta N_{\text{entrant}} = N_{\Sigma_o}(t) + \phi_e(r + dr) \cdot dt$$

$$N_{\text{fermé}}(t + dt) = N_{\Sigma_o}(t + dt) + \delta N_{\text{sortant}} = N_{\Sigma_o}(t + dt) + \phi_s(r) \cdot dt$$

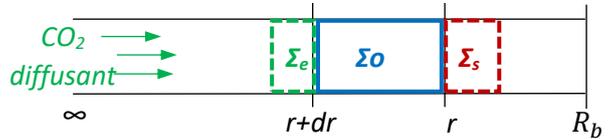
$$\Rightarrow N_{\text{fermé}}(t + dt) - N_{\text{fermé}}(t) = N_{\Sigma_o}(t + dt) - N_{\Sigma_o}(t) + \phi_s(r) \cdot dt - \phi_e(r + dr) \cdot dt$$

Pour un système fermé, le nombre de particules restent constant :

$$0 = \frac{dN_{\Sigma_o}}{dt} \cdot dt + \phi_s(r) \cdot dt - \phi_e(r + dr) \cdot dt$$

En régime stationnaire : $\frac{dN_{\Sigma_o}}{dt} = 0 \Rightarrow$ D'où : $\boxed{\phi_s(r) = \phi_e(r + dr) = \phi = cste}$

En régime stationnaire, il y a conservation du flux.



2. La loi de Fick définit le flux en tenant compte qu'il est dans le sens des r décroissants : $\boxed{\phi = +D \cdot \frac{dn^*}{dr} \cdot S}$

avec ϕ le flux de CO₂ à travers une surface sphérique de rayon r en s^{-1} ;

$S = 4\pi \cdot r^2$ la surface de la sphère, en m^2 ;

D le coefficient de diffusion du CO₂ dans le champagne, en $m^2 \cdot s^{-1}$;

n^* la concentration moléculaire en CO₂, en m^{-3} .

3. La concentration en masse de CO₂ est définie par : $c_{CO_2} = \frac{m}{V} = \frac{n \cdot M}{V} = \frac{\left(\frac{N}{N_A}\right) \cdot M}{V} = \boxed{\frac{n^* \cdot M}{N_A} = c}$

4. D'après la loi de Fick et avec la relation précédente :

$$\phi = +D \cdot \frac{dn^*}{dr} \cdot S = D \cdot \frac{d\left(\frac{c \cdot N_A}{M}\right)}{dr} \cdot (4\pi \cdot r^2) = \frac{D \cdot N_A}{M} \cdot \frac{dc}{dr} \cdot (4\pi \cdot r^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dc}{dr} = \frac{\left(\phi \cdot \frac{M}{N_A}\right)}{4\pi \cdot D \cdot r^2} = \frac{A}{4\pi \cdot D \cdot r^2}} \text{ avec } \boxed{A = \left(\phi \cdot \frac{M}{N_A}\right)}$$

5. En intégrant la relation précédente : $\int_r^\infty \frac{dc}{dr} \cdot dr = \int_r^\infty \frac{A}{4\pi \cdot D \cdot r^2} \cdot dr$

$$\Rightarrow c(\infty) - c(r) = \frac{A}{4\pi \cdot D} \times \left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{Soit : } c(r) = -\frac{A}{4\pi \cdot D} \times \left(\frac{1}{r}\right) + c(\infty) = -\frac{A}{4\pi \cdot D} \times \left(\frac{1}{r}\right) + c_c$$

Or, en $r = R_b$: $c(R_b) = c_1 = -\frac{A}{4\pi \cdot D} \times \left(\frac{1}{R_b}\right) + c_c \Rightarrow \left(-\frac{A}{4\pi \cdot D}\right) = (c_1 - c_c) \times R_b$

$$\text{D'où : } \boxed{c(r) = (c_1 - c_c) \times R_b \times \left(\frac{1}{r}\right) + c_c}$$

6. En prenant la définition du taux de variation et en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits pour la quantité de matière n_g de dioxyde de carbone, on a :

$$\phi = \frac{dN_g}{dt} = \frac{d(n_g \cdot N_A)}{dt} = \frac{d\left(\frac{P \cdot V}{R \cdot T} \cdot N_A\right)}{dt} = \boxed{\frac{P}{R \cdot T} \cdot N_A \cdot \frac{d(V)}{dt} = \frac{dN_g}{dt}}$$

7. La bulle étant sphérique : $\frac{dV}{dt} = \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi R_b^3\right)}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times (3 \cdot R_b^2) \cdot \frac{d(R_b)}{dt}$

Avec la relation précédente, on a alors : $\frac{P}{R.T} \cdot N_A \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot R_b^2 \frac{d(R_b)}{dt}\right) = \frac{dN_g}{dt} = \phi$ (*)

Avec Q4 : $\phi = \frac{D \cdot N_A}{M} \cdot \frac{dc}{dr} \cdot (4\pi \cdot r^2)$

Avec Q5 : $c(r) = (c_1 - c_c) \times R_b \times \left(\frac{1}{r}\right) + c_c \Rightarrow \frac{dc}{dr} = -(c_1 - c_c) \times R_b \times \left(\frac{1}{r^2}\right)$ }

$\Rightarrow \phi = \frac{D \cdot N_A}{M} \cdot \left(- (c_1 - c_c) \times R_b \times \left(\frac{1}{r^2}\right)\right) \cdot (4\pi \cdot r^2) = \frac{D \cdot N_A}{M} \cdot ((c_c - c_1) \times R_b) \cdot (4\pi)$ (**)

(*) & (**) $\Rightarrow \frac{P}{R.T} \cdot N_A \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot R_b^2 \frac{d(R_b)}{dt}\right) = \frac{D \cdot N_A}{M} \cdot ((c_c - c_1) \times R_b) \cdot (4\pi)$

$\Rightarrow \left(R_b \cdot \frac{d(R_b)}{dt}\right) = \frac{R.T}{P \cdot N_A} \cdot \frac{D \cdot N_A}{M} \cdot (c_c - c_1)$ Soit : $R_b \cdot \frac{d(R_b)}{dt} = \frac{D \cdot R.T}{P \cdot M} \cdot (c_c - c_1)$

$\dim \left[R_b \cdot \frac{d(R_b)}{dt} \right] = \dim[R_b] \cdot \dim \left[\frac{d(R_b)}{dt} \right] = L \cdot \frac{L}{T} = L^2 \cdot T^{-1}$

$\dim \left[\frac{D \cdot R.T}{P \cdot M} \cdot (c_c - c_1) \right] = \frac{\dim[D] \cdot \dim \left[\frac{R.T}{P} \right]}{\dim[M]} \cdot \dim[c] = \frac{(L^2 \cdot T^{-1}) \times (L^3 \cdot \text{mol}^{-1})}{M \cdot \text{mol}^{-1}} \times (M \cdot L^{-3}) = L^2 \cdot T^{-1}$

Les deux membres de l'équation sont bien de même dimension.

8. En intégrant la relation précédente : $\int_0^t R_b \cdot \frac{d(R_b)}{dt} \cdot dt = \int_0^t \frac{D \cdot R.T}{P \cdot M} \cdot (c_c - c_1) \cdot dt$

$\Rightarrow \frac{R_b(t)^2}{2} - \frac{R_b(0)^2}{2} = \frac{R_b(t)^2}{2} = \frac{D \cdot R.T}{P \cdot M} \cdot (c_c - c_1) \times t$

$\Rightarrow R_b(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot R.T}{P \cdot M} \cdot (c_c - c_1) \times t}$

9. Avec la relation précédente : $\Delta t = \frac{P \cdot M}{2 \cdot D \cdot R.T \cdot (c_c - c_1)} \cdot R_b^2$

AN : $\Delta t = \frac{1 \cdot 10^5 \times 44 \cdot 10^{-3}}{2 \times 3 \cdot 10^{-9} \times 8,314 \times 293 \times (12 - 1,3)} \cdot (10 \cdot 10^{-6})^2 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$