

La diffusion T1 : Oxygénation du sang dans les capillaires pulmonaires

Le bon fonctionnement des organes nécessite un apport en dioxygène régulier. Dans cette partie on propose d'étudier l'oxygénation du sang dans les capillaires pulmonaires.

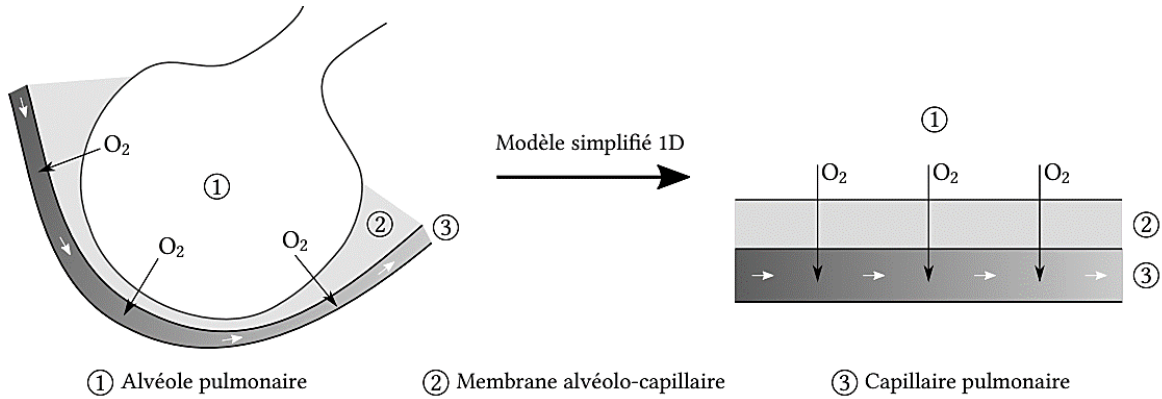


Figure 6 – À gauche : schéma d'un capillaire pulmonaire en interaction avec une alvéole pulmonaire. À droite : le modèle unidimensionnel (1D) correspondant. Dans le capillaire ③, le sang coloré en gris clair représente un sang chargé en O_2 et déchargé en CO_2 ; le sang coloré en gris foncé représente un sang déchargé en O_2 et chargé en CO_2 . Les flèches blanches indiquent le sens de l'écoulement du sang. Les flèches noires indiquent le transfert de dioxygène à travers la membrane alvéolo-capillaire.

On aborde l'oxygénation du sang par une approche de diffusion de particules. Dans un souci de simplification, plusieurs processus ne sont pas pris en compte comme la capture du dioxygène par les globules rouges ou bien le transport de dioxygène par convection dans les capillaires pulmonaires.

A. Modèle unidimensionnel en régime stationnaire.

On se propose d'établir l'équation de la diffusion concernant la concentration en dioxygène O_2 dans un capillaire pulmonaire. On néglige le transport du dioxygène par convection dans les capillaires sanguins.

On s'intéresse à un capillaire pulmonaire assimilable à un tube cylindrique (de rayon a et de longueur L) d'axe x caractérisé par une concentration en dioxygène $C_{O_2}(x)$ (voir schéma figure 7 ci-contre). La concentration en dioxygène est supposée uniforme sur toute section du cylindre orthogonale à Ox .

On considère le régime stationnaire. On note $C_{O_2}(x = 0) = C_1$ la concentration molaire en O_2 à l'entrée du capillaire et $C_{O_2}(x = L) = C_2$ la concentration molaire à la sortie du capillaire. On note $\phi(x)$ le flux algébrique de O_2 rentrant en x dans le sens de \vec{u}_x .

Pour tenir compte de l'apport de molécules de O_2 par diffusion à travers la membrane alvéolo-capillaire on considère un flux latéral de particules.

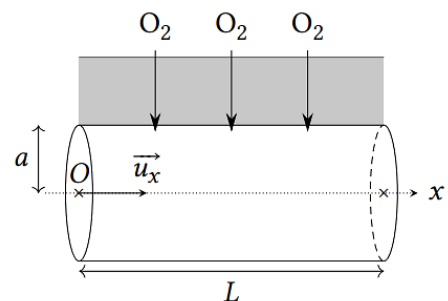


Figure 7 – Capillaire pulmonaire assimilable à un cylindre. Le rectangle gris représente la membrane alvéolo-capillaire à travers laquelle le O_2 est transféré.

Le flux latéral de particules entrant par une surface latérale de cylindre $dS_{\text{lat}} = \pi a dx$ s'exprime par $d\phi_{\text{lat}} = h(C_{\text{ext}} - C_{\text{O}_2}(x)) \cdot dS_{\text{lat}}$ où C_{ext} est la concentration en dioxygène dans l'alvéole pulmonaire et h est la perméabilité de la membrane alvéolo-capillaire. Cet apport latéral se fait sur la moitié supérieure de la surface latérale du cylindre.

C_{ext} est supposée constante. Le capillaire est suffisamment long pour considérer que $C_{\text{ext}} = C_2 > C_1$.

On choisit d'exprimer toutes les concentrations en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ et tous les flux en $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Préciser l'unité de h en fonction des unités de base du système international.
2. En faisant un bilan de particules sur une tranche de cylindre comprise entre x et $x + dx$, montrer que le flux $\phi(x)$ suit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\phi}{dx} = \pi ah [C_{\text{ext}} - C_{\text{O}_2}(x)]$$

3. Rappeler la loi de Fick. En déduire une relation entre $\phi(x)$ et $C_{\text{O}_2}(x)$. On notera D_{O_2} le coefficient de diffusion du dioxygène dans le sang et on exprimera l'unité de D_{O_2} en fonction des unités de base du système international.
4. En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $C_{\text{O}_2}(x)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 C_{\text{O}_2}}{dx^2} - \frac{C_{\text{O}_2}(x) - C_{\text{ext}}}{\ell^2} = 0 \quad \text{avec } \ell^2 = \frac{D_{\text{O}_2} a}{h}$$

Faire l'application numérique pour ℓ et donner un sens physique à ce paramètre.

Données :

- Rayon typique d'un capillaire pulmonaire : $a = 4,0 \mu\text{m}$
- Perméabilité de la membrane alvéolo-capillaire : $h = 66 \times 10^{-6}$ unités SI
- Coefficient de diffusion de O_2 dans le sang : $D_{\text{O}_2} = 1,7 \times 10^{-7}$ unités SI

5. La solution de l'équation différentielle de la question **14** peut s'écrire sous la forme suivante :

$$C_{\text{O}_2}(x) = A + B e^{-x/\ell} + C e^{x/\ell}$$

- a. La longueur d'un capillaire pulmonaire L est typiquement de 1 mm. En comparant ℓ et L , expliquer succinctement que l'on puisse considérer que $L = +\infty$ dans la suite.
 - b. Déterminer les constantes A , B et C en fonction des données de l'énoncé.
 - c. Tracer l'allure de $C_{\text{O}_2}(x)$ et faire apparaître ℓ sur votre graphique.
6. Montrer que la quantité de dioxygène transférée par unité de temps de l'alvéole pulmonaire vers le capillaire pulmonaire s'exprime, en moles par seconde, par la relation :

$$\phi_{\text{lat},1 \text{ capillaire}} = h(C_{\text{ext}} - C_1) \times \pi a \ell$$

B. Estimation de la consommation d'oxygène.

En pratique, les données d'oxygénation du sang dans les capillaires pulmonaires ne sont pas données en terme de concentration en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ mais en terme de pression partielle de dioxygène P_{O_2} en mmHg.

Afin de pouvoir comparer des données réelles aux résultats de la partie précédente, nous avons besoin d'introduire le coefficient de Henry σ tel que $C_{\text{O}_2} = \sigma \times P_{\text{O}_2}$

Pour le dioxygène dans le sang, on prendra $\sigma = 1,7 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{mmHg}^{-1}$

Ainsi, la quantité de dioxygène transférée par unité de temps (en $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$) de l'alvéole pulmonaire vers le capillaire pulmonaire (voir question 16) s'exprime en fonction des pressions partielles sous la forme suivante :

$$\Phi_{\text{lat},1 \text{ capillaire}} = h\sigma \times (P_{\text{O}_2,\text{ext}} - P_{\text{O}_2,1}) \times \pi a \ell$$

avec $P_{\text{O}_2,\text{ext}}$ la pression partielle en dioxygène dans une alvéole pulmonaire et $P_{\text{O}_2,1}$ la pression partielle en dioxygène à l'entrée d'un capillaire pulmonaire.

En prenant en compte qu'il y a N capillaires pulmonaires placés en parallèle qui permettent l'oxygénation du sang, la quantité de dioxygène transférée par unité de temps (en $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$) vers tous les capillaires pulmonaires s'exprime par :

$$\Phi_{\text{lat},N \text{ capillaire}} = N \times \Phi_{\text{lat},1 \text{ capillaire}} = N \times h\sigma \times (P_{\text{O}_2,\text{ext}} - P_{\text{O}_2,1}) \times \pi a \ell$$

7. Déterminer le volume molaire V_m d'un gaz parfait à 25 °C sous pression atmosphérique $P_{\text{atm}} = 1,013 \text{ bar}$.

Donnée : Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

On souhaite estimer le volume de dioxygène transféré par minute des alvéoles-pulmonaires vers les capillaires sanguins en utilisant le modèle développé dans cette partie II.

Pour un individu adulte au repos, le nombre de capillaires pulmonaires fonctionnels est de $N \simeq 20 \times 10^9$ et les pressions partielles en dioxygène sont $P_{\text{O}_2,\text{ext}} = 100 \text{ mmHg}$ et $P_{\text{O}_2,1} = 40 \text{ mmHg}$.

8. Déterminer le volume de dioxygène transféré par minute des poumons vers les capillaires pulmonaires. On notera V_{O_2} cette quantité et on l'exprimera en $\text{L} \cdot \text{min}^{-1}$.

Données :

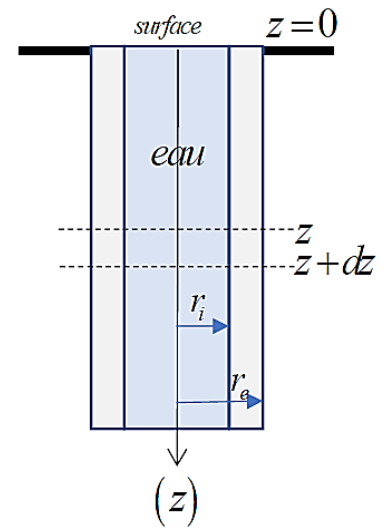
- Rayon typique d'un capillaire pulmonaire : $a = 4,0 \mu\text{m}$
- Perméabilité de la membrane alvéolo-capillaire : $h = 66 \times 10^{-6} \text{ unités SI}$
- Coefficient de Henry : $\sigma = 1,7 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{mmHg}^{-1}$

9. Comparer votre valeur de consommation d'oxygène à la valeur typiquement mesurée pour un individu adulte en bonne santé au repos : $V_{\text{O}_2} \approx 0,2 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$.

Partie A

Un puits d'alimentation pour la géothermie est modélisé par un cylindre de révolution vertical, de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e , homogène et de conductivité thermique λ . On repère la *profondeur* à partir de la surface à l'aide d'un axe vertical (z) orienté vers le *bas*, comme indiqué sur la figure ci-contre.

On suppose pour l'instant que toute la surface intérieure du puits est maintenue à la température $T_i = T(r_i)$ et que la surface extérieure est maintenue à la température $T_e = T(r_e)$ (uniforme également). Les extrémités du tube (en $z = 0$ et $z = H$) sont parfaitement isolées thermiquement : T ne dépend que de la distance r à l'axe (z). On notera $\phi(r)$ le flux thermique.



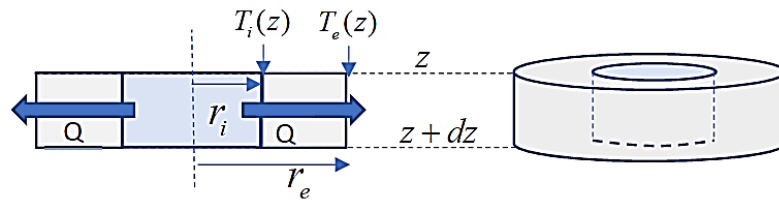
- A1.** Montrer qu'en régime stationnaire, le flux thermique ϕ est le même à travers tout cylindre de hauteur H , d'axe (z) et de rayon $r \in [r_i; r_e]$.
- A2.** Déterminer la résistance thermique R de cette conduite en fonction de r_i, r_e, λ et H .
- A3.** En déduire l'expression de la température $T(r)$ à l'intérieur du tube, pour $r \in [r_i; r_e]$, uniquement en fonction de T_i, T_e, r_i, r_e et r .

En réalité la température du sol et de l'eau dans le tube dépendent de la profondeur z . On suppose que la température $T_i(z)$ de la surface intérieure du puits est égale à la température de l'eau à la profondeur z , et de même $T_e(z)$ est égale à la température du sol à la profondeur z . On suppose pour l'instant que l'eau se trouve à l'état liquide dans tout le tube et se comporte comme un fluide incompressible. Le sol est homogène et la température ne dépend que de z et de la distance r à l'axe de symétrie (z) du puits. On suppose que l'on a atteint un régime stationnaire : $T_i(z)$ et $T_e(z)$ sont indépendantes du temps. On considère que le transfert thermique ne se fait que *radialement* (on néglige les transferts thermiques par conduction dans la direction z).

L'eau chaude monte (sens z *décroissant*) à la vitesse constante v dans le tuyau. On note c la capacité thermique massique de l'eau (à volume constant), ρ sa masse volumique, et D_m son débit de masse. Sa viscosité est supposée négligeable.

- A4.** En supposant provisoirement l'eau immobile, montrer que la quantité $p(z) - \rho g z$ est indépendante de z .

On admet maintenant qu'en régime d'écoulement stationnaire, la répartition de la pression $p(z)$ dans l'eau n'est pas modifiée par rapport au cas de l'hydrostatique. On rappelle d'autre part que l'eau est supposée incompressible et que le diamètre du tuyau est constant.



A5. Justifier que dans ces conditions, la quantité $\frac{p}{\rho} - gz + \frac{v^2}{2}$ a la même valeur en z et en $z + dz$. Justifier d'autre part que l'enthalpie massique peut s'écrire $h = u + \frac{p}{\rho}$, où u est l'énergie interne massique.

A6. Appliquer le premier principe industriel au volume de contrôle de rayon r_i compris entre les profondeurs z et $z + dz$ (cf. schéma). Puis exprimer la puissance thermique P_{th} reçue par la tranche de hauteur dz en fonction de λ , r_i , r_e , $T_i(z)$, $T_e(z)$ et dz , et en déduire que la température $T_i(z)$ de l'eau dans le puits varie avec la profondeur z selon : $dT_i = T_i(z + dz) - T_i(z) = \frac{T_i(z) - T_e(z)}{A} \cdot dz$, où A est une constante à exprimer en fonction de D_m , c , r_i , r_e et λ . Vérifiez que A a bien la dimension d'une longueur.

On rappelle qu'en régime stationnaire, le bilan d'énergie (premier principe industriel) pour un système ouvert peut s'écrire : $P_m + P_{th} = D_m [h + e_c + e_p]_{entrée}^{sortie}$ où h est l'énergie interne massique, e_c est l'énergie cinétique massique, e_p est l'énergie potentielle de pesanteur massique, P_m la puissance mécanique utile reçue, P_{th} la puissance thermique reçue. D'autre part la notation $[X]_{entrée}^{sortie}$ signifie : X en sortie moins X en entrée.

On suppose que la température du sol à l'extérieur du tuyau varie linéairement avec la profondeur : $T_e(z) = T_0 + \beta z$, où β (le gradient géothermique) est une constante.

A7. D'après la question précédente, à quelle équation différentielle obéit la température $T_i(z)$? Chercher une solution de cette équation du type $T_i(z) = a \cdot e^{bz} + cz + d$, où a , b , c et d sont quatre constantes. En déduire les valeurs de b , c et d en fonction de A , β et T_0 .

On suppose qu'à la profondeur $z = H$ du réservoir, la température de l'eau est la même que celle du sol.

A8. En déduire l'expression de la constante a et l'expression complète de $T_i(z)$ en fonction de β , A , H , T_0 et z .

Partie B

A la surface, pour une altitude $z = 0$, des flux thermiques sont répertoriés : un flux surfacique radiatif reçu et cédé par la surface, un flux surfacique de convection, un flux surfacique induit par les précipitations et un flux surfacique conductif dans le sol.

Un corps noir de température absolue T émet un rayonnement thermique. La loi de Wien donne la longueur d'onde pour laquelle l'émittance (puissance émise par unité de surface du corps noir et par unité de longueur d'onde) est maximale à la température T du corps noir :

$$\lambda_{max} = \frac{cte}{T} \quad \text{avec } cte = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

La loi de Stefan-Boltzmann donne l'expression de la puissance surfacique rayonnée (émittance énergétique totale, prenant en compte toutes les longueurs d'onde) :

$$\phi_{th}(T) = \sigma \cdot T^4 \quad \text{avec } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \text{ est la constante de Stefan-Boltzmann}$$

B1. Qu'est-ce qui distingue les transferts thermiques par conduction ou convection des transferts thermiques par rayonnement ? Qu'est-ce qui distingue les transferts thermiques par conduction des transferts thermiques par convection ?

B2. Justifier, par un calcul de longueur d'onde en μm , que des radiations de courte longueur d'onde sont dues au Soleil (température moyenne $T_S = 5,8 \cdot 10^3 \text{ K}$) alors que des radiations de grande longueur d'onde sont dues au système terrestre (température moyenne $T_T = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$).

B3. Calculer le flux radiatif dans le cas où le sol se comporte comme un corps noir de température égale à $5,0 \text{ }^\circ\text{C}$.

B4. Le flux diffusif suit la loi de Fourier. Que vaut-il dans le cas d'un sol isotherme ?

B5. Le flux surfacique apporté par les précipitations suit une loi de type loi de Newton : donner l'expression de P en fonction du coefficient de transfert thermique h , de la température de la pluie qui tombe T_p et de la température de la surface du sol T_{sol} dans le cas $T_p > T_{surf}$.

B6. Le coefficient h dépend de la masse volumique du sol ρ , de sa capacité thermique massique c et de l'intensité I de précipitation : $h = \rho^a c^b I^c$.

Par analyse dimensionnelle, déterminer a , b et c et exprimer h en fonction de ρ , c et I .

L'intensité de précipitation est souvent exprimée en $\text{mm} \cdot \text{heure}^{-1}$.

La conduction thermique T2 : Echangeur thermique pour le traitement du lait

Ce sujet s'appuie sur les techniques mises en œuvre par la Ferme de la Tremblaye (La Boissière École, Yvelines) pour parvenir à une valorisation énergétique de résidus issus de la production laitière et des activités de transformation fromagère de la ferme. La ferme, d'une superficie de 125 ha, regroupe environ 600 chèvres et 260 vaches laitières. Ces animaux produisent des effluents valorisés sur place dans une unité de méthanisation.

Données numériques :	* rayon intérieur :	$R_i = 1,0 \text{ cm}$
	* épaisseur de la conduite :	$e = 2,0 \text{ mm}$
	* coefficients conducto-convectifs :	$h_1 = h_2 = 2,0 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
	* $\lambda = 502$ unités S.I.	
	* capacité thermique massique du lait (fluide 1) :	$c_{p1} = 3,8 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
	* capacité thermique massique de l'eau (fluide 2) :	$c_{p2} = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
	* débit massique du lait (fluide 1) :	$D_{m1} = 0,052 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
	* débit massique de l'eau (fluide 2) :	$D_{m2} = 0,30 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

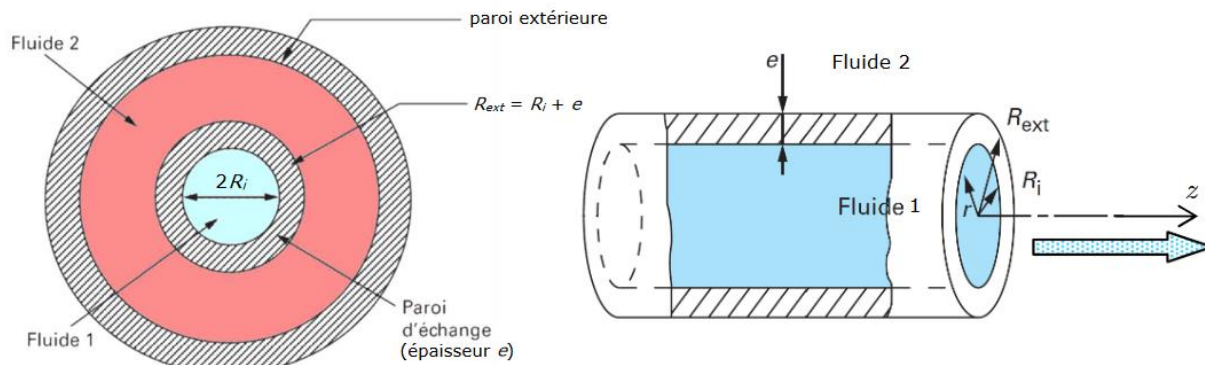
Document 1 : Présentation chiffrée de l'installation de la ferme de la Tremblaye

L'unité de méthanisation est conçue pour recueillir 12 700 tonnes d'effluents par an. À partir de ces intrants, on estime que 923 000 m³ de biogaz peuvent être produits ainsi que près de 11 000 tonnes de digestat. Ce volume de biogaz a un potentiel énergétique estimé à près de 5 120 MWh (en énergie primaire) par an. Il permet de produire de l'électricité grâce à un moteur de 250 kW et de la chaleur par cogénération. L'exploitant estime qu'il est possible d'en tirer annuellement 1 895 MWh, soit l'équivalent de la consommation électrique d'approximativement 600 foyers, et 2 304 MWh de chaleur principalement dédiés au process de la laiterie de la fromagerie.

« Du fumier fleurit l'énergie dans une ferme des Yvelines », Connaissance des énergies, 14 novembre 2013

Note : le mégawattheure (MWh) est l'énergie délivrée par un processus associé à une puissance d'un mégawatt pendant une heure : $1 \text{ MWh} = 3,6 \times 10^9 \text{ J}$.

Document 2 : Structure d'un échangeur thermique



Source : Les techniques de l'Ingénieur

Le fluide 1, à la température T_1 , que l'on veut réchauffer, s'écoule dans une canalisation cylindrique en métal dont on note e l'épaisseur de la paroi. Le fluide 2, à la température T_2 plus élevée, s'écoule quant à lui dans une canalisation coaxiale extérieure à la première. (Coupe axiale à gauche et transversale à droite). Entre les rayons R_i et R_{ext} , dans le métal, le transfert thermique s'effectue par conduction thermique selon la loi de Fourier.

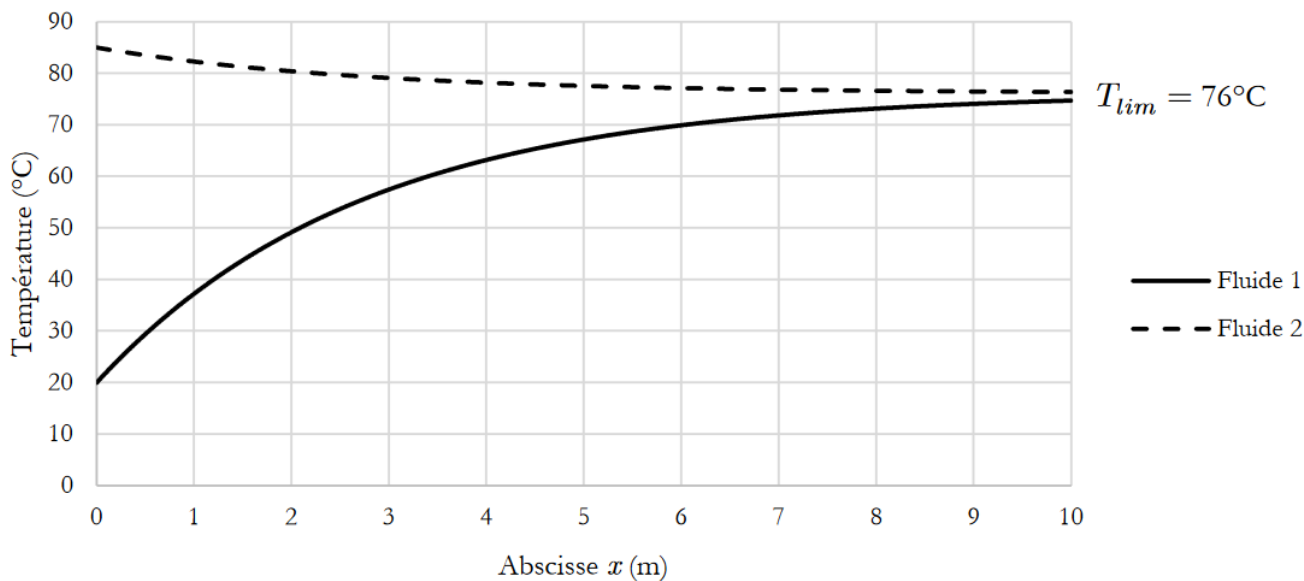
Entre le fluide 1 et la paroi intérieure, de même qu'entre le fluide 2 et la paroi extérieure, il s'agit d'un échange conducto-convectif. Le flux thermique sur une surface S à l'interface entre le fluide 1 et la paroi s'écrit : $\phi = h_1 \cdot S [T(R_i) - T_1]$. À cause de la convection, on n'a pas $T(R_i) = T_1$.

De même, à l'interface entre le fluide 2 et la paroi, on a sur une surface S' : $\phi = h_2 \cdot S' [T_2 - T(R_{ext})]$.

h_1 et h_2 sont des constantes physiques appelées les coefficients de transfert conducto-convectif.

Document 3 : Modélisation de la température dans un échangeur à co-courant cylindrique

Evolution des températures dans l'échangeur



Note : en pratique, en raison de leur longueur, les échangeurs thermiques ne sont pas rectilignes. un échangeur à co-courant correspond au cas où les deux fluides s'écoulent dans le même sens.

a) Rappeler la loi de Fourier donnant le flux thermique ϕ_{th} dans le cas d'une symétrie plane et préciser le nom et l'unité du système international de λ .

On considère un cylindre de longueur ℓ , de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur $R_{ext} = R_i + e$. La température en $r = R_i$ est notée T_i , la température en $r = R_{ext}$ est notée $T_{ext} \geq T_i$. On note $\phi_{th} = \phi_{th}(r)$ en coordonnées cylindriques, dirigé vers l'extérieur. On suppose également que T ne dépend que de r . On se place en régime permanent.

b) On considère r tel que $R_i \leq r \leq R_{ext}$. Exprimer la puissance thermique ϕ transférée à travers le cylindre, de l'extérieur vers l'intérieur du cylindre, en fonction, entre autres, de r et de ℓ . En déduire par intégration que la différence de température $T_{ext} - T_i$ est reliée à ϕ par la relation :

$$T_{ext} - T_i = \frac{1}{2\pi\ell\lambda} \cdot \ln\left(\frac{R_{ext}}{R_i}\right) \cdot \phi \quad \text{On note } R_{th} = \frac{1}{2\pi\ell\lambda} \cdot \ln\left(\frac{R_{ext}}{R_i}\right).$$

c) Montrer que dans le cas où $e \ll R_i$, $R_{th} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e}{2\pi R_i \ell}$.

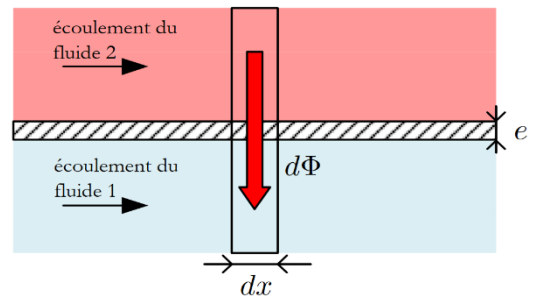
d) En utilisant le résultat précédent (question b) et le document 2, montrer que la différence de température $T_2 - T_1$ est reliée à ϕ par la relation $T_2 - T_1 = R \cdot \phi$ où l'on exprimera R en fonction de R_i , R_{ext} , h , ℓ , λ et e .

e) En déduire que si $R_{ext} \approx R_i$, il reste : $R = \frac{e}{2\pi R_i \ell} \cdot \left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{\ell} + \frac{1}{h_2} \right]$

On prend en compte désormais le fait que T_1 et T_2 dépendent de l'abscisse x du cylindre. On note $\phi(x)$ le flux thermique du fluide 2 vers le fluide 1 entre l'abscisse x et l'abscisse $x+dx$. La relation précédente devient alors : $T_{ext} - T_i = \frac{e}{2\pi R_i} \cdot \left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{\ell} + \frac{1}{h_2} \right] \cdot \frac{d\phi}{dx}$. Pour plus de commodité, on la note : $T_{ext} - T_i = K \cdot \frac{d\phi}{dx}$.

f) Donner l'unité et calculer la valeur numérique de K .

Représentation schématique du flux thermique élémentaire $d\phi$ du fluide 2 vers le fluide 1 entre les abscisses x et $x+dx$.



g) On note c_{p1} (resp. c_{p2}) la capacité thermique massique du fluide 1 (resp. du fluide 2). On note D_{m1} (resp. D_{m2}) le débit massique du fluide 1 (resp. du fluide 2). Etablir que $D_{m2} \cdot c_{p2} [T_2(x+dx) - T_2(x)] = -d\phi$. Etablir aussi que $D_{m1} \cdot c_{p1} [T_1(x+dx) - T_1(x)] = d\phi$.

h) Etablir alors l'équation différentielle suivante, en notant $\Delta T(x) = T_2(x) - T_1(x)$:

$$\frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{D_{m1} \cdot c_{p1}} + \frac{1}{D_{m2} \cdot c_{p2}} \right) \cdot \Delta T = 0$$

Définir et calculer numériquement la longueur caractéristique Λ qui apparaît dans la solution de cette équation différentielle. Ecrire la solution $\Delta T(x)$ en notant ΔT_0 l'écart de température $T_2 - T_1$ en $x = 0$.

i) Le document 2 présente l'évolution calculée de la température des deux fluides en utilisant le modèle précédent. Justifier la cohérence de cette modélisation avec l'étude précédente. Déterminer graphiquement la longueur nécessaire pour l'échangeur pour atteindre la température de 72 °C.

j) En régime permanent, un brûleur de méthane réchauffe le fluide 2 (qui a été refroidi dans l'échangeur) pour le porter à nouveau à la température d'entrée de l'échangeur. Evaluer la puissance thermique nécessaire pour cette opération avec les données du document 3. Comparer à la puissance thermique moyenne disponible grâce à la combustion du méthane (document 1). Conclure.

La diffusion T1 : Oxygénation du sang dans les capillaires pulmonaires Agro24 (50min)
A. Modèle unidimensionnel en régime stationnaire.

$$1. \quad \dim[h] = \dim \left[\frac{d\phi_{lat}}{(C_{ext} - C_{O_2}(x)) \cdot dS_{lat}} \right] = \frac{\dim[d\phi_{lat}]}{\dim[(C_{ext} - C_{O_2}(x))] \times \dim[dS_{lat}]} = \frac{\text{MOL} \cdot \text{T}^{-1}}{\text{MOL} \cdot \text{L}^{-3} \times \text{L}^2} = \underline{\text{L} \cdot \text{T}^{-1}}$$

h s'exprime en mètre par seconde : $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Soit le système constitué par :

{ les particules dans Σ_0 , cylindre de volume, $dV = S \cdot dx$ }_{ouvert}

$$N_{\Sigma_0}(t + dt) - N_{\Sigma_0}(t) = +\delta N_{\Sigma_e} - \delta N_{\Sigma_s} + \delta N_{lat} = \phi_e(x) \cdot dt - \phi_s(x + dx) \cdot dt + d\phi_{lat} \cdot dt$$

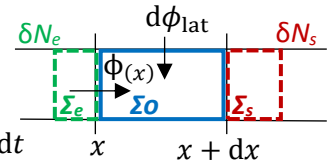
$$\Rightarrow \frac{dN_{\Sigma_0}}{dt} \cdot dt = \phi_e(x) \cdot dt - \phi_s(x + dx) \cdot dt + d\phi_{lat} \cdot dt$$

Le régime est stationnaire donc : $\frac{dN_{\Sigma_0}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \phi_e(x) \cdot dt - \phi_s(x + dx) \cdot dt + d\phi_{lat} \cdot dt$

Soit : $0 = \frac{[\phi_e(x) - \phi_s(x + dx)]}{dx} \cdot dx + d\phi_{lat} = \left[-\frac{d\phi}{dx} \right] \cdot dx + d\phi_{lat} = \left[-\frac{d\phi}{dx} \right] \cdot dx + h \cdot (C_{ext} - C_{O_2}(x)) \cdot dS_{lat}$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dx} \cdot dx = h \cdot (C_{ext} - C_{O_2}(x)) \cdot dS_{lat} = h \cdot (C_{ext} - C_{O_2}(x)) \cdot \pi \cdot a \cdot dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{dx} = h \cdot (C_{ext} - C_{O_2}(x)) \cdot \pi \cdot a}$$



3. * La loi de Fick donne en symétrie axiale :

$$\boxed{\phi_{particules} = -D \cdot \frac{dn^*}{dx} \cdot S}$$

* Pour un flux en quantité de matière de dioxygène, il vient :

$$\phi(x) = \frac{\phi_{particules}}{N_A} = -\frac{D_{O_2}}{N_A} \cdot \frac{dn_{O_2}^*}{dx} \cdot S = -D_{O_2} \cdot \frac{d\left(\frac{n_{O_2}^*}{N_A}\right)}{dx} \cdot S = \boxed{-D_{O_2} \cdot \frac{dC_{O_2}}{dx} \cdot S = \phi(x)} \quad \text{avec } S = \pi \cdot a^2$$

$$* \dim[D_{O_2}] = \dim \left[\frac{\phi(x)}{\frac{dC_{O_2}}{dx} \cdot S} \right] = \frac{\dim[\phi(x)]}{\dim \left[\frac{dC_{O_2}}{dx} \right] \times \dim[S]} = \frac{\text{MOL} \cdot \text{T}^{-1}}{(\text{MOL} \cdot \text{L}^{-3} / \text{L}) \times \text{L}^2} = \underline{\text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}}$$

D_{O_2} s'exprime en mètre carré par seconde : $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

4. D'après la question Q2 : $\frac{d\phi}{dx} = h \cdot (C_{ext} - C_{O_2}(x)) \cdot \pi \cdot a$

D'après la question Q3 : $\phi(x) = -D_{O_2} \cdot \frac{dC_{O_2}}{dx} \cdot \pi a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{d(-D_{O_2} \cdot \frac{dC_{O_2}}{dx} \cdot \pi a^2)}{dx} = -D_{O_2} \cdot \frac{d^2 C_{O_2}}{dx^2} \cdot \pi a^2$

$$\Rightarrow -D_{O_2} \cdot \frac{d^2 C_{O_2}}{dx^2} \cdot \pi a^2 = h \cdot (C_{ext} - C_{O_2}(x)) \cdot \pi \cdot a$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 C_{O_2}}{dx^2} = -\frac{h}{D_{O_2} \cdot a} \cdot (C_{ext} - C_{O_2}(x)) = +\frac{h}{D_{O_2} \cdot a} \cdot (C_{O_2}(x) - C_{ext})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 C_{O_2}}{dx^2} - \frac{h}{D_{O_2} \cdot a} \cdot (C_{O_2}(x) - C_{ext}) = \boxed{\frac{d^2 C_{O_2}}{dx^2} - \frac{1}{\ell^2} \cdot (C_{O_2}(x) - C_{ext}) = 0} \quad \text{avec } \ell^2 = \frac{D_{O_2} \cdot a}{h}$$

$$AN : \quad \ell = \sqrt{\frac{D_{O_2} \cdot a}{h}} = \sqrt{\frac{1,7 \cdot 10^{-7} \times 4,0 \cdot 10^{-6}}{66 \cdot 10^{-6}}} = \underline{1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,10 \text{ mm}}$$

ℓ représente la longueur caractéristique du phénomène pour que le dioxygène diffuse jusqu'au centre du capillaire.

5a. $5 \times \ell = 0,50 \text{ mm} < L = 1 \text{ mm}$

La longueur L du capillaire est supérieure à 5 fois la longueur caractéristique du phénomène de diffusion. Au-delà, on peut estimer que la concentration en dioxygène reste constante et égale à $C_2 = C_{ext}$.

La concentration n'évolue plus après comme si le capillaire était infiniment long : $L = +\infty$.

5b. Pour déterminer les constantes, on regarde les conditions aux limites :

$$(\alpha) \quad C_{O_2}(x=0) = C_1 = A + B \cdot e^{-0/\ell} + C \cdot e^{0/\ell} = A + B + C$$

$$(\beta) \quad C_{O_2}(x=L) = C_2 = A + B \cdot e^{-L/\ell} + C \cdot e^{L/\ell} \approx A + B \cdot e^{-\infty/\ell} + C \cdot e^{\infty/\ell} = A + C \cdot e^{\infty/\ell}$$

(β) => Comme la concentration reste bornée à C_{ext} : $C = 0$ et donc : $A = C_2$

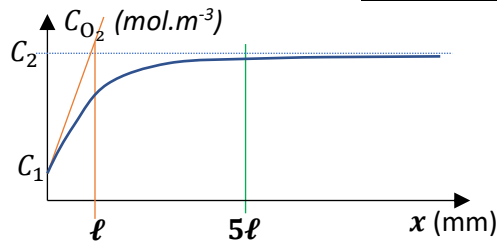
(α) => $C_1 = A + B + C = C_2 + B + 0 \Rightarrow B = C_1 - C_2$

$$\text{D'où : } C_{O_2}(x) = C_2 + (C_1 - C_2) \cdot e^{-x/\ell}$$

5c. $C_{O_2}(x) = C_2 + (C_1 - C_2) \cdot e^{-x/\ell}$

avec $C_{O_2}(x=0) = C_1$

$C_{O_2}(x=L) = C_2 > C_1$



6. Pour connaître la quantité de dioxygène transférée par unité de temps de l'alvéole pulmonaire vers le capillaire, soit le flux de dioxygène, il faut intégrer le flux latéral de particules sur toute la surface latérale du cylindre :

$$\Phi_{lat,1 \text{ capillaire}} = \int_0^L h \cdot (C_{ext} - C_{O_2}(x)) \cdot dS_{lat} = \int_0^L h \cdot \left(C_{ext} - \left(C_2 + (C_1 - C_2) \cdot e^{-x/\ell} \right) \right) \cdot \pi a \cdot dx \quad \text{avec } C_{ext} = C_2$$

$$\Phi_{lat,1 \text{ capillaire}} = \int_0^L -h \cdot (C_1 - C_2) \cdot e^{-x/\ell} \cdot \pi a \cdot dx = -h \cdot (C_1 - C_2) \cdot \pi a \cdot \int_0^L e^{-x/\ell} \cdot dx = -h \cdot (C_1 - C_2) \cdot \pi a \cdot \left[-\ell \cdot e^{-x/\ell} \right]_0^L$$

$$\Phi_{lat,1 \text{ capillaire}} = -h \cdot (C_1 - C_2) \cdot \pi a \cdot \left(-\ell \cdot e^{-L/\ell} + \ell \cdot e^{-0/\ell} \right) \approx -h \cdot (C_1 - C_2) \cdot \pi a \cdot \left(-\ell \cdot e^{-\infty/\ell} + \ell \cdot e^{-0/\ell} \right)$$

$$\Phi_{lat,1 \text{ capillaire}} = -h \cdot (C_1 - C_2) \cdot \pi a \cdot (0 + \ell) = +h \cdot (C_2 - C_1) \cdot \pi a \cdot \ell = \boxed{+h \cdot (C_{ext} - C_1) \cdot \pi a \cdot \ell = \Phi_{lat,1 \text{ capillaire}}}$$

B. Estimation de la consommation d'oxygène.

7. L'équation d'état d'un gaz parfait est : $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

$$\Rightarrow \boxed{V_m = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P}} = \frac{8,314 \times (273+25)}{1,013 \cdot 10^5} = \underline{24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}}$$

8. $V_{O_2} = V_m \times (\Phi_{lat,N \text{ capillaire}} \times 60) = \boxed{V_m \times (N \times h\sigma \times (P_{O_2,ext} - P_{O_2,1}) \times \pi a \ell \times 60)}$

AN : $V_{O_2} = 24 \cdot 10^{-3} \times (20 \cdot 10^9 \times 66 \cdot 10^{-6} \times 1,7 \cdot 10^{-3} \times (100 - 40)) \times \pi \times 4,0 \cdot 10^{-6} \times 1,0 \cdot 10^{-4} \times 60$

$$V_{O_2} = \underline{0,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{min}^{-1} = 0,25 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}}$$

9. On trouve une valeur correspondante à celle typiquement mesurée pour un individu adulte en bonne santé au repos. Le modèle utilisé ici pour étudier l'oxygénation du sang par une approche de diffusion de particules est donc validé, même si la capture du dioxygène par les globules rouges ou encore son transfert par convection sont négligés.

A1. Le { système compris entre r et $r + dr$ appartenant à $[r_i; r_e]$ }, au repos macroscopique, subit des transferts thermiques par conduction, on s'intéresse donc à son énergie interne :

D'après le 1^{er} principe de la thermodynamique :

$$dU_{sys} = \Sigma \delta W + \Sigma \delta Q = 0 + \delta Q_e - \delta Q_s = \phi_{th,e}(r) \cdot dt - \phi_{th,s}(r + dr) \cdot dt$$

$$\text{Or : } dU_{sys} = C \cdot dT \quad \Rightarrow \quad C \cdot dT = \phi_{th,e}(r) \cdot dt - \phi_{th,s}(r + dr) \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad C \cdot \frac{dT}{dt} = \phi_{th,e}(r) - \phi_{th,s}(r + dr)$$

Les conditions aux limites imposées au milieu de diffusion sont constantes ($T_i = T(r_i)$ et $T_e = T(r_e)$ ne varient pas), le régime est donc indépendant du temps : on parle de **régime stationnaire** avec « $\frac{dT}{dt} = 0$ » d'où :

$$\phi_{th,e}(r) = \phi_{th,s}(r + dr) = \phi = \text{cste}$$

En régime stationnaire, le flux thermique est le même à travers tout le cylindre.

A2. Par analogie avec l'électrocinétique : $R_{elec} = \frac{\Delta V}{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{T_i - T_e}{\phi}$

Avec la loi de Fourier : $\phi = -\lambda \cdot \left(\frac{dT}{dr}\right) \cdot S(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{\lambda} \times \frac{1}{S(r)} = -\frac{\phi}{\lambda} \times \frac{1}{2\pi \cdot r \cdot H} = -\left(\frac{\phi}{2\pi\lambda H}\right) \times \frac{1}{r}$

En intégrant entre r_e et r_i , le flux étant constant :

$$[T(r)]_{r_e}^{r_i} = T(r_i) - T(r_e) = T_i - T_e = -\left(\frac{\phi}{2\pi\lambda H}\right) \times [\ln(r)]_{r_e}^{r_i} = -\left(\frac{\phi}{2\pi\lambda H}\right) \times \ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right) = +\left(\frac{\phi}{2\pi\lambda H}\right) \times \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

On en déduit :
$$\mathbf{R} = \frac{T_i - T_e}{\phi} = \left(\frac{1}{2\pi\lambda H}\right) \times \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

A3. En reprenant l'expression issue de la loi de Fourier et en intégrant entre r_i et r :

$$[T(r)]_{r_i}^r = T(r) - T_i = -\left(\frac{\phi}{2\pi\lambda H}\right) \times [\ln(r)]_{r_i}^r = -\left(\frac{\phi}{2\pi\lambda H}\right) \times \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) = +\left(\frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)}\right) \times \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

D'où :
$$\mathbf{T(r)} = T_i + (T_i - T_e) \times \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)}\right)$$

A4. D'après la **relation fondamentale de la statique des fluides**, avec Oz descendant : $\frac{dp}{dz} = +\rho g$

En intégrant entre la surface $z = 0$ et la profondeur z , la masse volumique étant constante :

$$p(z) - p_{atm} = \rho g \cdot (z - 0)$$

Soit : $p(z) - \rho g \cdot z = p_{atm}$

La quantité « $p(z) - \rho g \cdot z$ » est bien constante.

A5. La viscosité de l'eau est négligeable, on l'assimile donc à un fluide parfait. L'eau est aussi incompressible (et homogène), il n'y a pas de travail autre que celui des forces de pression et l'écoulement est stationnaire. On peut donc utiliser la **relation de Bernoulli** le long d'une ligne

de courant qui descend de z à $z + dz$:
$$\mathbf{\frac{p}{\rho} - gz + \frac{v^2}{2} = \text{cste}}$$

Par définition : $\mathbf{H} = \mathbf{U} + \mathbf{pV}$

L'enthalpie massique peut donc s'écrire :

$$\mathbf{h} = u + \frac{pV}{m} = u + \frac{pV}{\rho V} = u + \frac{p}{\rho}$$

A6. * D'après le 1^{er} principe industriel : $P_m + P_{th} = D_m [h + e_c + e_p]_z^{z+dz} = D_m \left[h + \frac{v^2}{2} - gz \right]_z^{z+dz}$

Avec **A5.**, il vient : $P_m + P_{th} = D_m \left[\left(u + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{v^2}{2} - gz \right]_z^{z+dz} = D_m \left[u + \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - gz \right) \right]_z^{z+dz}$

$$P_m + P_{th} = D_m [u + (cste)]_z^{z+dz} = D_m [u]_z^{z+dz} = D_m \cdot (u(z + dz) - u(z))$$

Il n'a pas de puissance mécanique utile donc $P_m = 0$:

$$P_{th} = D_m \cdot (u(z + dz) - u(z))$$

Et au niveau de r_i , on a $u = c \cdot T_i$:

$$P_{th} = D_m \cdot (c \cdot T_i(z + dz) - c \cdot T_i(z)) = D_m \cdot c \cdot (T_i(z + dz) - T_i(z))$$

* La puissance thermique correspond aussi au flux thermique définie précédemment :

$$\frac{T_i - T_e}{\phi} = \left(\frac{1}{2\pi\lambda H} \right) \times \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right) \quad \text{Soit sur } dz : \quad \frac{T_i(z) - T_e(z)}{\phi} = \left(\frac{1}{2\pi\lambda \cdot dz} \right) \times \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = P_{th} = \frac{2\pi\lambda \cdot dz \times (T_i(z) - T_e(z))}{\ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)}$$

* Avec les deux relations, il vient : $D_m \cdot c \cdot (T_i(z + dz) - T_i(z)) = \frac{2\pi\lambda \cdot dz \times (T_i(z) - T_e(z))}{\ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)}$

D'où : $(T_i(z + dz) - T_i(z)) = dT_i = \frac{2\pi\lambda \cdot dz \times (T_i(z) - T_e(z))}{D_m \cdot c \cdot \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)} = \frac{(T_i(z) - T_e(z))}{A} \cdot dz$ avec $A = \frac{D_m \cdot c \cdot \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)}{2\pi\lambda}$

$$\dim[A] = \dim \left[\frac{D_m \cdot c \cdot \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)}{2\pi\lambda} \right] = \dim \left[\frac{D_m \cdot c}{\lambda} \right] = \frac{\dim[D_m] \cdot \dim[c]}{\dim[\lambda]} = \frac{\dim[D_m] \cdot \dim[c]}{\dim \left[\frac{\phi}{S \cdot (dT/dz)} \right]} = \frac{(M \cdot T^{-1}) \cdot (M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} / M)}{\frac{(M \cdot L^2 \cdot T^{-2} / T)}{L^2 \cdot (\theta \cdot L^{-1})}} = L$$

A est bien homogène à une longueur.

A7. $dT_i = \frac{(T_i(z) - T_e(z))}{A} \cdot dz = \frac{(T_i(z) - (T_0 + \beta \cdot z))}{A} \cdot dz \Rightarrow \frac{dT_i}{dz} - \frac{T_i(z)}{A} = -\frac{T_0}{A} - \frac{\beta}{A} \cdot z$

En posant « $T_i(z) = a \cdot e^{bz} + cz + d$ » et donc « $\frac{dT_i}{dz} = ab \cdot e^{bz} + c$ », il vient avec l'équation différentielle :

$$ab \cdot e^{bz} + c - \frac{a \cdot e^{bz} + cz + d}{A} = \left(ab - \frac{a}{A} \right) \cdot e^{bz} - \frac{c}{A} \cdot z + \left(c - \frac{d}{A} \right) = -\frac{T_0}{A} - \frac{\beta}{A} \cdot z$$

Par identification, on a : $\underline{c = \beta} \quad \& \quad \underline{b = \frac{1}{A}} \quad \& \quad \underline{d = T_0 + \beta \cdot A}$

A8. Température de l'eau (donc $r = r_i$) : $T_i(H) = a \cdot e^{bH} + cH + d = a \cdot e^{\frac{H}{A}} + \beta H + (T_0 + \beta A)$
 Température de l'eau (donc $r = r_e$) : $T_e(H) = T_0 + \beta \cdot H$

Si la température de l'eau est la même que celle du sol : $a \cdot e^{H/A} + \beta H + (T_0 + \beta A) = T_0 + \beta \cdot H$

D'où : $a = -\beta A \cdot e^{-H/A}$

On a donc : $T_i(z) = -\beta A \cdot e^{\frac{z-H}{A}} + \beta \cdot z + (T_0 + \beta \cdot A)$

B1. Un **transfert thermique par rayonnement** ne nécessite **pas de support matériel** pour se produire contrairement aux transferts thermiques par conduction ou convection.

Un **transfert thermique par convection** implique un **mouvement macroscopique du fluide** contrairement au **transfert thermique par conduction** qui se produit que par agitation moléculaire.

B2. D'après la loi de Wien : $\lambda_{\max,S} = \frac{2,898.10^{-3}}{T_S} = \frac{2,898.10^{-3}}{5,8.10^3} = 0,50.10^{-6} \text{ m} = \underline{0,50 \mu\text{m}}$

$$\lambda_{\max,T} = \frac{2,898.10^{-3}}{T_T} = \frac{2,898.10^{-3}}{3,0.10^2} = 9,7.10^{-6} \text{ m} = \underline{9,7 \mu\text{m}}$$

$\lambda_{\max,T} > \lambda_{\max,S}$ donc les **radiations de courte longueur d'onde sont bien dues au Soleil** et celles de grande longueur d'onde à la Terre.

B3. Le **flux radiatif est surfacique** est correspond à une **puissance surfacique**. On utilise la loi de Stefan-Boltzmann pour le calculer : $\phi_{\text{th}}(5 \text{ °C}) = 5,67.10^{-8} \cdot (273 + 5,0)^4 = \underline{3,4.10^2 \text{ W.m}^{-2}}$

B4. D'après la **loi de Fourier** : $\Phi = -\lambda \cdot \left(\frac{dT}{dr}\right) \cdot S_{(r)}$

Dans le cas d'un sol **isotherme**, la différentielle de température est **nulle** donc le flux diffusif aussi.

B5. La **loi de Newton pour les transferts conducto-convectifs** s'écrit :

$$\mathbf{P} = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{T}_{\text{fluide}} - \mathbf{T}_{\text{surface}}) = h \cdot (T_p - T_{\text{sol}}) \quad (> 0 \text{ ici})$$

B6. $\dim[h] = \dim[\rho^a \cdot c^b \cdot I^c] = (\dim[\rho])^a \cdot (\dim[c])^b \cdot (\dim[I])^c$

$$\dim[h] = (M \cdot L^{-3})^a \cdot (M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1} / M)^b \cdot (L \cdot T^{-1})^c = M^a \cdot L^{-3a+2b+c} \cdot T^{-2b-c} \cdot \theta^{-b}$$

Or : $\dim[h] = \dim\left[\frac{P}{\Delta T}\right] = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2} / (T \cdot L^2)}{\theta} = M \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1}$

Par identification, on a : $\underline{a = 1} \quad \underline{b = 1} \quad \underline{c = 1}$

a) $\phi_{th} = -\lambda \cdot (dT/dx) \cdot S$

λ est la conductivité thermique et s'exprime en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$.

b) $\phi = -\phi_{th} = +\lambda \cdot (dT/dr) \cdot (2\pi r \ell)$

Le **régime est permanent donc le flux est conservatif**. On peut donc intégrer entre l'intérieur et l'extérieur :

$$\int_{T_i}^{T_{ext}} dT = \int_{R_i}^{R_{ext}} \frac{\phi}{2\pi r \lambda} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr \qquad T_{ext} - T_i = \frac{\phi}{2\pi \ell \lambda} \cdot [\ln(r)]_{R_i}^{R_{ext}} = \frac{\phi}{2\pi \ell \lambda} \cdot \ln\left(\frac{R_{ext}}{R_i}\right)$$

c) Si $e \ll R_i$: $\ln(R_{ext}/R_i) = \ln((R_i+e)/R_i) = \ln(1+e/R_i) \approx e/R_i \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{2\pi \ell \lambda} \cdot \frac{e}{R_i}$

d) D'après le document 2 :

$$\phi = h_1 \cdot S [T(R_i) - T_1] \Rightarrow T(R_i) - T_1 = \frac{\phi}{h_1 \cdot S} = \frac{\phi}{h_1 \cdot (2\pi R_i \ell)}$$

$$\phi = h_2 \cdot S [T_2 - T(R_{ext})] \Rightarrow T_2 - T(R_{ext}) = \frac{\phi}{h_2 \cdot S} = \frac{\phi}{h_2 \cdot (2\pi R_{ext} \ell)}$$

Avec la question précédente :

$$T(R_{ext}) - T(R_i) = \frac{\phi}{2\pi \ell \lambda} \cdot \ln\left(\frac{R_{ext}}{R_i}\right)$$

En sommant et factorisant, on a : $T_2 - T_1 = \frac{\phi}{2\pi \ell} \cdot \left(\frac{1}{h_1 \cdot R_i} + \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{R_{ext}}{R_i}\right) + \frac{1}{h_2 \cdot R_{ext}} \right)$

D'où : $R = \frac{e}{2\pi \ell} \cdot \left[\frac{1}{h_1 \cdot R_i} + \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{R_{ext}}{R_i}\right) + \frac{1}{h_2 \cdot R_{ext}} \right]$

e) Si $e \ll R_i$: $R \approx \frac{e}{2\pi \ell} \cdot \left[\frac{1}{h_1 \cdot R_i} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e}{R_i} + \frac{1}{h_2 \cdot (R_i+e)} \right] \approx \frac{e}{2\pi \ell} \cdot \left[\frac{1}{h_1 \cdot R_i} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e}{R_i} + \frac{1}{h_2 \cdot R_i} \right] \approx \frac{e}{2\pi R_i \ell} \cdot \left[\frac{1}{h_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \right]$

f) $\dim[K] = \dim[T]/\dim[\phi/x] \Rightarrow K$ s'exprime en $K \cdot W^{-1} \cdot m$ $K = 1,6 \cdot 10^{-2} K \cdot W^{-1} \cdot m$

g) Le **flux thermique s'écoule du fluide 2 vers le fluide 1**. Pendant une durée dt , le fluide 2 perd une énergie élémentaire « $d\phi \cdot dt$ » au profit du fluide 1 : $dU_2 = -d\phi \cdot dt$ & $dU_1 = +d\phi \cdot dt$

Or, pour une quantité de fluide élémentaire : $dU = \delta m \cdot c_p \cdot dT$

D'où : $\delta m_2 \cdot c_{p2} \cdot dT_2 = -d\phi \cdot dt \Rightarrow D_{m2} \cdot c_{p2} \cdot (T_2(x+dx) - T_2(x)) = -d\phi$

De même, il vient : $D_{m1} \cdot c_{p1} \cdot (T_1(x+dx) - T_1(x)) = +d\phi$

h) $D_{m2} \cdot c_{p2} \cdot (T_2(x+dx) - T_2(x)) = -d\phi \Rightarrow D_{m2} \cdot c_{p2} \cdot \frac{dT_2}{dx} = -\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\Delta T}{K} \Rightarrow \frac{dT_2}{dx} = \frac{-\Delta T}{K \cdot D_{m2} \cdot c_{p2}}$

$D_{m1} \cdot c_{p1} \cdot (T_1(x+dx) - T_1(x)) = +d\phi \Rightarrow D_{m1} \cdot c_{p1} \cdot \frac{dT_1}{dx} = +\frac{d\phi}{dx} = +\frac{\Delta T}{K} \Rightarrow \frac{dT_1}{dx} = \frac{\Delta T}{K \cdot D_{m1} \cdot c_{p1}}$

$$\frac{dT_2}{dx} - \frac{dT_1}{dx} = \frac{d\Delta T}{dx} = \frac{-\Delta T}{K \cdot D_{m2} \cdot c_{p2}} - \frac{\Delta T}{K \cdot D_{m1} \cdot c_{p1}} \Rightarrow \frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{D_{m1} \cdot c_{p1}} + \frac{1}{D_{m2} \cdot c_{p2}} \right) \cdot \Delta T = 0$$

La longueur caractéristique se définit alors par : $\Lambda = \frac{1}{K \cdot \left(\frac{1}{D_{m1} \cdot c_{p1}} + \frac{1}{D_{m2} \cdot c_{p2}} \right)}$ AN : $\Lambda = 2,7 \text{ m}$

i) L'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote T_{lim} , on trouve une **longueur caractéristique $\Lambda \approx 3 \text{ m}$** ; ce qui est cohérent avec le résultat précédent.

Le lait atteint les $72 \text{ }^\circ\text{C}$ pour une distante de **8 m** environ.

j) $D_{m2} \cdot c_{p2} \cdot (T_2(x=0) - T_{lim}) = P_{th} = 0,30 \times 4,2 \times (85 - 76) = 11,3 \text{ kW}$

5120 MWh par an correspond à une puissance de 584 kW, largement supérieure à celle nécessaire pour traiter le lait en température. Si l'on ne compte que la chaleur co-générée : 2 304 MWh par an correspondent à une puissance de 263 kW.

C'est encore très supérieur aux besoins contrairement à ce qu'annonce le document 2 : « 2 304 MWh de chaleur, principalement dédiés au process de la fromagerie ».