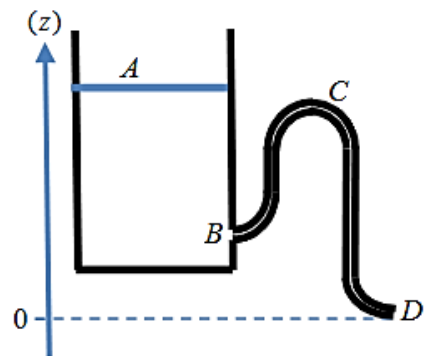


Fluide Parfait 1 : Le siphon : un oscillateur de relaxation en mécanique des fluides

On considère dorénavant à un oscillateur de relaxation en mécanique des fluides.

Soit un réservoir cylindrique d'axe vertical (Oz) orienté vers le haut, dont la base a pour aire S . Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine altitude h (soit $h = z_A$ pour un certain point A en surface). La partie basse de ce réservoir est percée d'un trou (point B), au contact d'un siphon (B-C-D), qui est une conduite de forme coudée et de section d'aire constante σ très petite devant S . La surface libre de l'eau (en A) et la sortie du siphon (point D) sont en contact avec l'air libre (pression atmosphérique P_0). D est plus bas que B , qui est lui-même plus bas que A . L'altitude de référence $z = 0$ est celle du point D , et les points B et C sont à des altitudes constantes z_B et z_C . Dans les calculs qui suivent nous allons considérer que le siphon est *amorcé* : il est entièrement rempli d'eau, considérée comme un fluide homogène de masse volumique ρ et incompressible : le siphon ne contient pas d'air. Dans ces conditions nous allons déterminer le temps de vidange du réservoir.



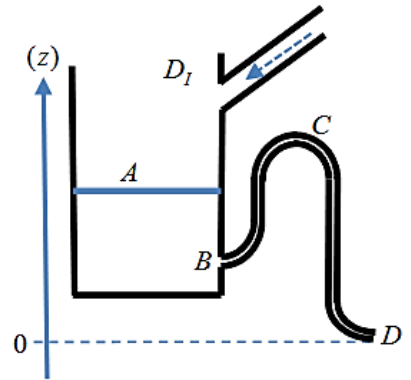
1. Ecrire le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre un point A à la surface de l'eau et un point D à la sortie du siphon. On suppose que les conditions d'application de ce théorème sont vérifiées. Quelles sont ces conditions ?
2. Justifier que la vitesse v_A de l'eau en A est très petite devant la vitesse en sortie du siphon v_D .

On remarque d'autre part que $v_A = -\dot{h}(t)$.

3. Justifier qu'avec les hypothèses faites, l'altitude $h(t)$ de l'eau dans le réservoir obéit approximativement à l'équation différentielle :
$$\dot{h} + \frac{\sigma}{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} = 0$$

4. Résoudre cette équation en supposant qu'à l'instant initial, $h(0) = h_0 \geq z_C$. En déduire que le niveau d'eau dans le réservoir parvient à l'entrée du siphon (en B) à l'instant $t_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot S}{\sqrt{g} \cdot \sigma} \cdot (\sqrt{h_0} - \sqrt{z_B})$. Que se passe-t-il à cet instant ?

Afin de modéliser l'écoulement de l'eau dans une grotte, on reprend les calculs précédents en supposant désormais que le réservoir est alimenté en permanence par une arrivée d'eau de débit de volume constant D_I qui ne perturbe pas l'écoulement de vidange (voir schéma ci-contre).



5. Dans les mêmes conditions que précédemment (le siphon étant rempli d'eau), justifier que la hauteur h de l'eau obéit maintenant à l'équation différentielle

$$\dot{h} + \frac{\sigma}{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} = \frac{D_I}{S}$$

6. Vérifier que cette équation possède une solution stationnaire, pour une hauteur d'eau h_S que l'on exprimera en fonction de D_I , σ et g . Cette hauteur doit évidemment être supérieure à celle de l'entrée du siphon. A quel débit minimum $D_{I,min}$ cela correspond-il ?

7. Lorsque le siphon contient de l'air, il ne fonctionne plus ($D_S = 0$) : on dit qu'il est *désamorcé*. Dans ce cas, comment évolue la hauteur d'eau dans le réservoir ? Etablir l'équation de $h(t)$.

8. Soit D_C le débit de volume sortant par le siphon (amorcé) lorsque $h = z_C$. Exprimer D_C en fonction de σ , g et z_C . Que peut-on dire de l'évolution ultérieure de h si $D_I > D_C$?

Ainsi lorsque $D_I < D_C$, le siphon évolue entre les deux états : amorcé et désamorcé. On suppose de plus que lorsque le siphon est amorcé, D_I est négligeable devant le débit de sortie.

9. Exprimer dans ces conditions la période des oscillations du niveau d'eau $h(t)$ dans le réservoir. Représenter qualitativement l'allure de ces oscillations.

- Données :
- masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
 - diamètre de l'hélice de l'hydrolienne : $D = 16 \text{ m}$;
 - vitesse du courant : $v_0 = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
 - tension continue en sortie de l'hydrolienne : $U_c = 150 \text{ kV}$.

Devant la nécessité d'augmenter la part des sources d'énergie renouvelable, les industriels sont lancés dans une course au développement des hydroliennes, cousines aquatiques des éoliennes, afin de profiter d'une source d'énergie prévisible : les courants marins. Dès 2003, Seaflow est la première hydrolienne installée à Lynmouth en Angleterre. En Europe, la France et la Grande-Bretagne disposent d'un potentiel de production particulièrement élevé. D'après EDF, une production de 5 GW (l'équivalent de la puissance maximale de la centrale nucléaire de Gravelines qui est la plus puissante centrale nucléaire française) peut être installée à proximité des côtes françaises.

Dans ce problème, un modèle simple permet d'illustrer la façon dont l'énergie d'un fluide en mouvement peut être récupérée.

L'eau est un fluide incompressible de masse volumique ρ_e et les effets de la pesanteur sont négligés. L'hydrolienne est composée d'un système qui soutient une hélice. Par souci de simplicité, il est supposé que seule cette dernière est en contact avec l'eau. L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre, par rapport auquel le support de l'hydrolienne est fixe, supposé galiléen, et muni d'un repère cartésien de centre O et de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Puissance transportée par le fluide

En l'absence d'hydrolienne, l'eau est en écoulement à la vitesse uniforme et constante $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_x$.

Dans un premier temps, la puissance qui traverse une section de surface S est calculée. Cette section est un disque placé dans le plan Oxy comme représenté Figure 1. Pendant une durée Δt une certaine quantité de fluide traverse la section.

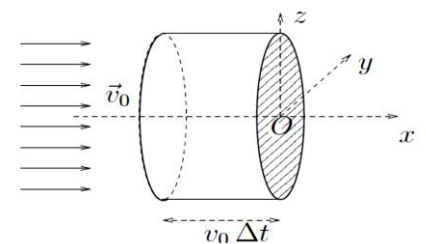


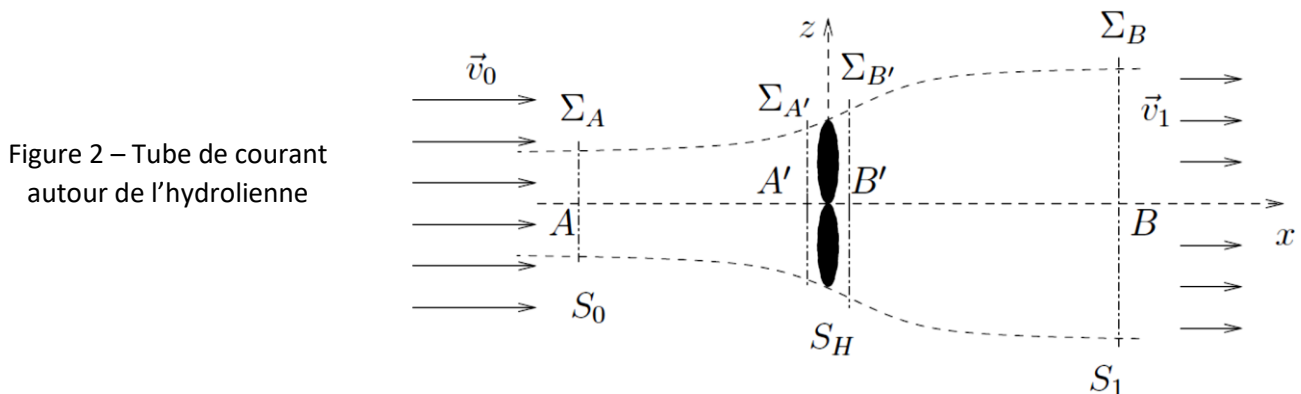
Figure 1 – Section perpendiculaire à l'écoulement du fluide

1. Expliquer l'utilité de considérer le volume V délimité par le cylindre de base S et de longueur $v_0 \cdot \Delta t$. Exprimer la masse de fluide contenue dans ce volume en fonction de ρ_e , v_0 , S et Δt .
2. Exprimer l'énergie cinétique E_c du fluide dans le volume V en fonction de ρ_e , v_0 , S et Δt . En déduire l'expression de la puissance $\mathcal{P}_0 = \frac{E_c}{\Delta t}$ qui traverse la section S en fonction de ρ_e , v_0 et S.
3. La masse volumique de l'air ρ_{air} est telle que $\rho_e \approx 800 \cdot \rho_{air}$. Comparer hydrolienne et éolienne en expliquant un avantage et un inconvénient de l'hydrolienne sur l'éolienne.

Puissance transmise à l'hydrolienne

Dans la suite, un modèle simple d'écoulement permanent du fluide autour de l'hydrolienne est étudié. L'écoulement de l'eau autour de l'hydrolienne présente une symétrie de révolution autour de Ox . La trace de l'intersection du tube de courant qui entoure l'hydrolienne avec le plan Oxz est représentée Figure 2.

- Loin de l'hydrolienne, en amont, l'eau est en écoulement uniforme à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_x$, la pression est uniforme et vaut P_0 . La section du tube de courant est notée Σ_A et son aire vaut S_0 .
- Loin de l'hydrolienne, en aval, la vitesse de l'écoulement à l'intérieur du tube de courant est uniforme et vaut $\vec{v}_1 = v_1 \cdot \vec{e}_x$, la pression est uniforme et vaut P_0 . La section du tube de courant est notée Σ_B et son aire vaut S_1 .
- Au niveau de l'hydrolienne, la vitesse est constante (entre A' et B') et uniforme et vaut $\vec{v}_H = v_H \cdot \vec{e}_x$. La section du tube de courant varie très peu et son aire vaut S_H . La pression est discontinue. Juste avant l'hydrolienne, elle vaut $P_{A'}$, et juste après elle vaut $P_{B'}$. La section du tube de courant passant par A' (respectivement B') est notée $\Sigma_{A'}$ (respectivement $\Sigma_{B'}$).
- L'écoulement du fluide est considéré comme parfait, sauf au voisinage immédiat de l'hydrolienne, entre A' et B' .
- Autour du tube de courant la pression est uniforme et vaut P_0 .
- La force exercée par le fluide sur l'hydrolienne vaut $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_x$.



4. Quelle(s) relation(s) lie(nt) S_0 , v_0 , S_H , v_H , S_1 et v_1 ? Justifier. Pourquoi la section du tube de courant est croissante le long de l'écoulement ?

5. Exprimer $P_{A'}$ et $P_{B'}$ en fonction de ρ_e , P_0 , v_0 , v_1 et v_H .

6. Etablir une première expression de F en fonction de ρ_e , S_H , v_0 et v_1 en travaillant entre les sections $\Sigma_{A'}$ et $\Sigma_{B'}$.

On admettra que les seules forces de pression à prendre en compte sont celles exercées par la pression $P_{A'}$ sur la section $\Sigma_{A'}$ et par la pression $P_{B'}$ sur la section $\Sigma_{B'}$, puisque, par symétrie, la force de pression sur le contour du tube de courant est quasiment nulle.

7. Etablir une seconde expression de F en fonction de ρ_e , S_H , v_H , v_0 et v_1 . Dans ce cas, on admet que la force de pression est nulle puisque la pression autour du volume de contrôle est uniforme. En déduire que : $v_H = k(v_0 + v_1)$, où k est un coefficient numérique à déterminer.

8. La puissance reçue par l'hydrolienne vaut $P_H = F \cdot v_H$. Le rendement η de l'hydrolienne est défini comme : $\eta = \frac{P_H}{P_0}$ où $P_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot S_H \cdot v_0^3$, puissance qui traverserait S_H en l'absence de l'hydrolienne. Exprimer η en fonction du rapport $\alpha = \frac{v_H}{v_0}$. Montrer que η atteint une valeur maximale η_{max} pour une valeur particulière de α et donner la valeur numérique de η_{max} .

9. Calculer la valeur numérique de la puissance maximale que peut recevoir l'hydrolienne. Combien d'hydroliennes de ce type faut-il installer sur les côtes françaises afin de tirer pleinement profit du potentiel énergétique hydrolien de 5 GW?

Fluide Parfait 3 : PRESSION DANS L'ATMOSPHERE

L'atmosphère terrestre est assimilée à du gaz parfait, de masse molaire $M = 29 \text{ g/mol}$, placée dans le champ de pesanteur uniforme, de norme $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$. Le référentiel lié à la Terre est supposé galiléen. On choisit l'axe vertical Oz dirigé vers le haut, l'origine est prise au niveau du sol où règne une pression $P_0 = 1 \text{ bar}$. On suppose que la pression P ne dépend que de l'altitude z .

1.1. En étudiant l'équilibre d'un petit cylindre de section droite S et de hauteur dz , compris entre les altitudes z et $z+dz$ au sein de l'atmosphère, établir l'équation suivante : $dP = -\mu \cdot g_0 \cdot dz$
où μ est la masse volumique du gaz.

1.2. On considère l'atmosphère isotherme à la température $T_0 = 288 \text{ K}$.

1.2.1. Exprimer la pression $P(z)$ en fonction de l'altitude.

1.2.2. On appelle hauteur caractéristique, l'altitude h telle que $P(h) = P_0/e$ avec $\ln(e) = 1$. Donner l'expression de h et calculer sa valeur.

1.2.3. Déterminer la valeur de la pression à l'altitude de 10 km.

1.3. On suppose désormais que la température n'est plus uniforme, mais obéit à l'équation suivante :

$$T(z) = T_0 \cdot (1 - az) \text{ avec } a = 0,0226 \text{ km}^{-1}$$

1.3.1. Déterminer la nouvelle loi d'évolution de la pression $P(z)$.

1.3.2. Calculer la pression à l'altitude de 10 km.

1.4. Pour les besoins de l'aéronautique et de la météorologie, une atmosphère standard a été définie pour une altitude inférieure à 11 km (troposphère). Les évolutions de la pression et de la température, en fonction de l'altitude z , sont données par : $P(z) = P_0(1 - az)^\beta$ et $T(z) = T_0(1 - az)$ avec $\beta = 5,26$.

Ce modèle d'atmosphère standard présente un bon accord avec la réalité.

Comparer les valeurs des pressions obtenues par les trois types d'atmosphère, à l'altitude $z = 10 \text{ km}$.
Conclure.

CORRECTION

Entraînement au concours_Mécanique des fluides parfaits

Fluide Parfait 1 :

Le siphon

(G2E 2021)

1. Pour un fluide parfait, incompressible et homogène, dans un écoulement stationnaire et n'échangeant ni travail utile ni chaleur, le long d'une ligne de courant :

$$P/\rho + \frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot z = \text{cste}$$

Entre A et D : $\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot v_A^2 + g \cdot z_A = P_D/\rho + \frac{1}{2} \cdot v_D^2 + g \cdot z_D$

Or : $P_A = P_0 = P_D \quad z_A = h \quad z_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot v_A^2 + g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_D^2}}$

2. En régime stationnaire et pour un fluide incompressible et homogène, le débit de volume se conserve :

$$D_V = \text{cste} = v_A \cdot S = v_D \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad v_A = v_D \times \left(\frac{\sigma}{S}\right) \quad \text{Or : } \sigma \ll S \text{ donc } \underline{\underline{v_A \ll v_D}}$$

3. En reprenant l'équation de Bernoulli entre A et D : $v_D^2 = v_A^2 + 2 \cdot g \cdot h \approx 2 \cdot g \cdot h$

Soit : $v_D = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

Or : $v_D = v_A \times \left(\frac{S}{\sigma}\right) \Rightarrow v_A \times \left(\frac{S}{\sigma}\right) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \Rightarrow \underline{\underline{-v_A + \left(\frac{\sigma}{S}\right) \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} = \dot{h} + \left(\frac{\sigma}{S}\right) \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} = 0}}$

4. L'équation différentielle est du premier ordre sans second membre. Elle a pour solution :

$$\sqrt{h(t)} - \sqrt{h(0)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot (t - 0)$$

A t_1 l'eau atteint le point B : $h(t) = z_B$ avec $h(0) = h_0$: $t_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot S}{\sqrt{g} \cdot \sigma} \cdot (\sqrt{h_0} - \sqrt{z_B})$

A cet instant, de l'air entre dans le siphon : il se désamorce.

5. La relation de Bernoulli établie en 1. est toujours valable.

L'eau de la cuve constitue un système ouvert Σ_0 .

On considère donc le système fermé constitué par l'eau dans la cuve et celle qui y entre à l'instant t qui s'écoule dans la cuve et qui en sort l'instant $t+dt$:

A t : $m(t)_{\text{fermé}} = m_{\Sigma_0}(t) + \delta m_{\text{entrée}}$

A $t+dt$: $m(t+dt)_{\text{fermé}} = m_{\Sigma_0}(t+dt) + \delta m_{\text{sortie}}$

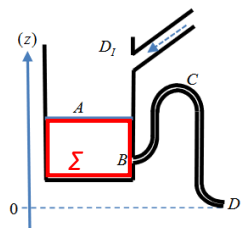
Par conservation de la masse dans un système fermé : $\frac{dm_{\text{fermé}}}{dt} = \frac{[m(t+dt)_{\text{fermé}} - m(t)_{\text{fermé}}]}{dt} = 0$

$$0 = \frac{dm_{\Sigma_0}}{dt} + \frac{\delta m_{\text{sortie}}}{dt} - \frac{\delta m_{\text{entrée}}}{dt} \Rightarrow \frac{dm_{\Sigma_0}}{dt} = \frac{d(\rho \cdot V_{\Sigma_0})}{dt} = \frac{\delta m_{\text{entrée}}}{dt} - \frac{\delta m_{\text{sortie}}}{dt} = D_{m,e} - D_{m,s} = \rho \cdot D_1 - \rho \cdot v_B \cdot \sigma$$

Soit : $\frac{d(V_{\Sigma})}{dt} = D_1 - v_D \cdot \sigma = D_1 - \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \sigma \Rightarrow \frac{d(V_{\Sigma})}{dt} = \frac{d((h(t) - h_{\text{fond}}) \times S)}{dt} = D_1 - \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \sigma$

$$\frac{d((h(t) - h_{\text{fond}}))}{dt} = \frac{d(h(t))}{dt} = \dot{h} = \frac{D_1}{S} - \left(\frac{\sigma}{S}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{h} + \frac{\sigma}{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} = \frac{D_1}{S}}}$$

6. En régime stationnaire : $\dot{h}_s = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{S} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h_s} = \frac{D_1}{S}$ soit : $\underline{\underline{h_s = \frac{D_1^2}{2 \cdot g \cdot \sigma^2}}}$



Il faut que la hauteur soit supérieure à l'entrée du siphon afin que l'eau s'évacue soit : $D_{I,\min} = \sigma \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{z_B}$

7. Lorsque le siphon ne fonctionne plus, le réservoir se remplit d'eau par D_I .

L'équation différentielle devient alors : $\dot{h} = \frac{D_I}{S}$ Par intégration, il vient : $h(t) - h_B = \frac{D_I}{S} \times t$

Le siphon se remplit en même temps que le réservoir si bien que lorsque $h = z_C$, le siphon se réamorçe.

8. En reprenant l'équation différentielle : $\frac{d(\rho \cdot V_{\Sigma 0})}{dt} = D_{m,e} - D_{m,s} = \rho \cdot D_I - \rho \cdot D_C$

Or : $\frac{d(\rho \cdot V_{\Sigma 0})}{dt} = \rho \cdot D_I - \rho \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \sigma \Rightarrow D_C = \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z_C}$

Si $D_I > D_C$, alors le réservoir se remplit plus vite qu'il ne se vide : le niveau d'eau h augmente dans le réservoir.

9. Si le réservoir est vide initialement, le siphon est désamorcé : $h(t) = \frac{D_I}{S} \times t + h_{\text{fond}}$ (Q7)

Dès que $h = z_C$, le siphon est amorcé et on néglige D_I : $\sqrt{h(t)} = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{S} \cdot \sqrt{2g}\right) \times t + \sqrt{z_C}$ (Q4)

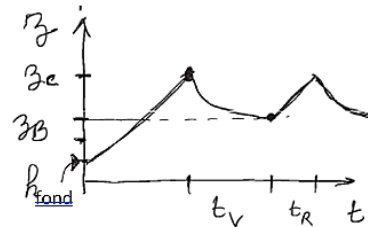
Dès que $h = z_B$, le siphon est désamorcé : $h(t) = \frac{D_I}{S} \times t + h_B$

Et ainsi de suite ...

Durée de vidange : $t_{\text{vide}} = \frac{\sqrt{2} \cdot S}{\sqrt{g} \cdot \sigma} \cdot (\sqrt{z_C} - \sqrt{z_B})$

Durée de remplissage : $t_{\text{rempli}} = \frac{S}{D_I} \cdot (z_C - z_B)$

Période d'oscillations : $T = t_{\text{vide}} + t_{\text{rempli}}$



Fluide Parfait 2 : L'HYDROLIENNE (Agro 2014) 1h

1. L'eau possédant une vitesse v_0 , elle parcourt une distance « $v_0 \cdot \Delta t$ » pendant une durée Δt d'où le volume considéré.

La masse de fluide contenue dans ce volume vaut : $m = \rho_e \cdot V = \rho_e \cdot (S \cdot v_0 \cdot \Delta t)$

2. $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (\rho_e \cdot S \cdot v_0 \cdot \Delta t) \cdot (v_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot S \cdot \Delta t \cdot v_0^3$ $P_0 = E_c / \Delta t = \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot S \cdot v_0^3$

3. La puissance de l'hydrolienne est 800 fois plus élevée que celle de l'éolienne ce qui est un bel avantage pour l'hydrolienne mais son installation, son entretien et la relier au réseau domestique sont autant d'inconvénients.

4. En régime stationnaire pour un fluide incompressible, le **débit de volume se conserve** :

$$D_V = \text{cst} = S_0 \cdot v_0 = S_H \cdot v_H = S_1 \cdot v_1$$

Lorsque l'eau rencontre l'hydrolienne, sa vitesse diminue (*conversion d'énergie*). Si la vitesse diminue le long de l'écoulement alors la section du tube de courant augmente par conservation du débit de volume.

5. Pour un fluide parfait, incompressible et homogène, dans un écoulement stationnaire, la relation de Bernoulli permet d'écrire le long d'une ligne de courant entre A et A' au centre du tube de courant :

$$P_A / \rho_e + \frac{1}{2} \cdot v_A^2 + g \cdot z_A = P_{A'} / \rho_e + \frac{1}{2} \cdot v_{A'}^2 + g \cdot z_{A'}$$

Avec « $z_A = z_{A'}$ » ; « $v_A = v_0$ » ; « $v_{A'} = v_H$ » ; « $P_A = P_0$ » :

$$P_{A'} = P_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot (v_0^2 - v_H^2)$$

De même, entre B' et B, il vient :

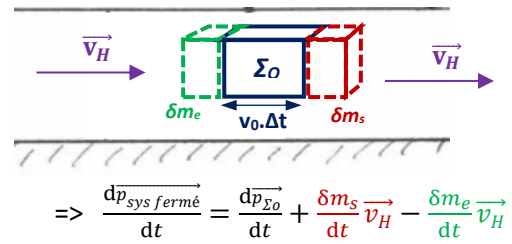
$$P_{B'} = P_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot (v_H^2 - v_1^2)$$

6. **Système :** {fluide incompressible $\Sigma_{A'}$ et $\Sigma_{B'}$ }_{ouvert}

On considère le système fermé :

$$\overline{p_{\text{sys fermé}}}(t) = \overline{p_{\Sigma_0}}(t) + \overline{p_{\text{entrant}}} = \overline{p_{\Sigma_0}}(t) + \delta m_e \cdot \vec{v}_H$$

$$\overline{p_{\text{sys fermé}}}(t + dt) = \overline{p_{\Sigma_0}}(t + dt) + \overline{p_{\text{sortant}}} = \overline{p_{\Sigma_0}}(t + dt) + \delta m_s \cdot \vec{v}_H$$



$$\Rightarrow \frac{dp_{\text{sys fermé}}}{dt} = \frac{dp_{\Sigma_0}}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt} v_H - \frac{\delta m_e}{dt} v_H$$

Or, d'après la **seconde loi de Newton** pour un **système fermé** « $\frac{dp_{\text{sys fermé}}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{\text{ext}}$ »

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{dp_{\Sigma_0}}{dt} + D_{m,s} \vec{v}_H - D_{m,e} \vec{v}_H$$

En **régime stationnaire**, il y a **conservation de la quantité de mouvement** et du **débit massique** :

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} + D_m \vec{v}_H - D_m \vec{v}_H = \vec{0}$$

Bilan des forces :

* force pressante en entrée :

$$\vec{F}_{\text{press,A'}} = P_{A'} \cdot S_H \cdot \vec{u}_x$$

* force pressante en sortie :

$$\vec{F}_{\text{press,B'}} = -P_{B'} \cdot S_H \cdot \vec{u}_x$$

* pas de force de viscosité

* on néglige la pesanteur

* Force exercée par l'hélice sur le fluide :

$$-\vec{F} = -F \cdot \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{0} = -F \cdot \vec{e}_x + P_{A'} \cdot S_H \cdot \vec{u}_x - P_{B'} \cdot S_H \cdot \vec{u}_x$$

$$\text{Sur Ox : } 0 = -F + P_{A'} \cdot S_H - P_{B'} \cdot S_H \quad \Rightarrow \quad F = (P_{A'} - P_{B'}) \cdot S_H = \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot (v_0^2 - v_1^2) \cdot S_H$$

7. On refait le même travail mais sur tout le tube de courant :

Système : {fluide incompressible Σ_A et Σ_B }_{ouvert}

On considère le système fermé :

$$\overline{p_{\text{sys fermé}}}(t) = \overline{p_{\Sigma_0}}(t) + \overline{p_{\text{entrant}}} = \overline{p_{\Sigma_0}}(t) + \delta m_e \cdot \vec{v}_0$$

$$\overline{p_{\text{sys fermé}}}(t + dt) = \overline{p_{\Sigma_0}}(t + dt) + \overline{p_{\text{sortant}}} = \overline{p_{\Sigma_0}}(t + dt) + \delta m_s \cdot \vec{v}_1$$

En régime stationnaire :

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = D_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$$

Bilan des forces :

* Force exercée par l'hélice sur le fluide :

$$-\vec{F} = -F \cdot \vec{e}_x$$

* les autres forces se compensent (pressantes) ou sont négligées (pesanteur).

$$\Rightarrow F = D_m \cdot (v_0 - v_1) = \rho_e \cdot (v_H \cdot S_H) \cdot (v_0 - v_1)$$

$$\text{Or : } F = \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot (v_0^2 - v_1^2) \cdot S_H = \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot (v_0 + v_1) \cdot (v_0 - v_1) \cdot S_H \quad \Rightarrow \quad v_H = \frac{1}{2} \cdot (v_0 + v_1) \quad \text{avec } k = \frac{1}{2}$$

$$8. \quad \eta = P_H / P_0 = F \cdot v_H / \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot S_H \cdot v_0^3 = \rho_e \cdot v_H^2 \cdot S_H \cdot (v_0 - v_1) / \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot S_H \cdot v_0^3 = 2 \cdot v_H^2 \cdot (v_0 - v_1) / v_0^3$$

$$\eta = 2 \cdot (v_H/v_0)^2 \cdot (v_0 - (2 \cdot v_H - v_0)) / v_0 = 2 \cdot (v_H/v_0)^2 \cdot (2 \cdot v_0 - 2 \cdot v_H) / v_0 = 2 \cdot (v_H/v_0)^2 \cdot (2 - 2 \cdot (v_H/v_0)) = 4 \cdot \alpha^2 \cdot (1 - \alpha)$$

$$d\eta/d\alpha = \dots = 4 \cdot [2\alpha \cdot (1 - \alpha) + \alpha^2 \cdot (-1)] = (d\eta/d\alpha = 0) \Leftrightarrow (\alpha = 2/3) \quad \Rightarrow \quad \eta_{\text{max}} = 4 \cdot (2/3)^2 \cdot (1 - (2/3)) = \dots = \dots \%$$

$$9. \quad P_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot S_H \cdot v_0^3 = \frac{1}{2} \cdot \rho_e \cdot (\pi \cdot (D/2)^2) \cdot v_0^3 = 9,2 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$\Rightarrow P_{H\text{max}} = P_0 \cdot \eta_{\text{max}} = 5,4 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$5 \text{ GW} = 5 \cdot 10^9 \text{ W} \Leftrightarrow N$$

$$5,4 \cdot 10^6 \text{ W} \Leftrightarrow 1 \text{ hydrolienne}$$



$$\Rightarrow N = \underline{920 \text{ hydroliennes sont nécessaires !}}$$

1.1. **Système :** {cylindre d'atmosphère}

Bilan des forces :

- * le poids du fluide : $\vec{F}_{\text{pesanteur}} = m \cdot \vec{g}_0 = -\mu \cdot (S \cdot dz) \cdot g_0 \cdot \vec{e}_z$
- * la force pressante en haut : $\vec{F}_{(z+dz)} = -P_{(z+dz)} \cdot S \cdot \vec{e}_z$
- * la force pressante en bas : $\vec{F}_{(z)} = +P_{(z)} \cdot S \cdot \vec{e}_z$

A l'équilibre : $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} = -\mu \cdot (S \cdot dz) \cdot g_0 \cdot \vec{e}_z - P_{(z+dz)} \cdot S \cdot \vec{e}_z + P_{(z)} \cdot S \cdot \vec{e}_z$

Sur Oz :
$$-\mu \cdot g_0 \cdot dz = P_{(z+dz)} - P_{(z)} = \frac{dP}{dz} \cdot dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{dz} = -\mu \cdot g_0}$$

1.2.1.
$$\frac{dP}{dz} = -\mu \cdot g_0 = -\frac{PM}{RT_0} \cdot g_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dz} = -\frac{M}{RT_0} \cdot g_0$$

$$\int_0^z \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dz} \right) \cdot dz = \int_0^z \left(-\frac{M}{RT_0} \cdot g_0 \right) \cdot dz = \left(-\frac{M}{RT_0} \cdot g_0 \right) \cdot \int_0^z dz$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \left(-\frac{M}{RT_0} \cdot g_0 \right) \cdot z \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = P_0 \cdot \exp\left[\left(-\frac{M}{RT_0} \cdot g_0\right) \cdot z\right]}$$

1.2.2.
$$P(h) = \frac{P_0}{e} \quad \Rightarrow \quad P_0 \cdot \exp\left[\left(-\frac{M}{RT_0} \cdot g_0\right) \cdot z\right] = \frac{P_0}{e} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{R \cdot T_0}{M \cdot g_0}} = \underline{8,3 \text{ km}}$$

1.2.3. $P(z = 10^3) = 0,30 \text{ bar}$

1.3.1.
$$\frac{dP}{dz} = -\mu \cdot g_0 = -\frac{PM}{RT_0} \cdot \frac{g_0}{(1-a \cdot z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dz} = -\frac{M}{RT_0} \cdot \frac{g_0}{(1-a \cdot z)} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{(1-a \cdot z)}$$

$$\int_0^z \left(\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dz} \right) \cdot dz = \int_0^z \left(-\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{(1-a \cdot z)} \right) \cdot dz = \left(-\frac{1}{h} \right) \cdot \int_0^z \frac{1}{(1-a \cdot z)} \cdot dz$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \left(-\frac{1}{h} \right) \cdot \left(-\frac{1}{a} \right) \cdot \ln(1 - a \cdot z) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = P_0 \cdot (1 - a \cdot z)^{\left(\frac{1}{ah}\right)}}$$

1.3.2. $P(z = 10^3) = 0,25 \text{ bar}$

1.4. $\frac{1}{ah} = 5,36 \approx \beta \quad P(z = 10^3) = 0,26 \text{ bar}$

Le modèle exploité par l'aéronautique est proche du modèle adiabatique : l'atmosphère n'est pas isotherme !