

Fluide Réel 1 : Quelques propriétés hydrodynamiques des glaciers

Du fait de leur plasticité, les glaciers s'écoulent lentement sous l'effet de la gravité avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocheux ou l'épaisseur de la glace. La vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerdlugssuaq dans le Groënland où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an. Par ailleurs, les glaciers ne sont pas des masses compactes de glace. Ils sont traversés par un réseau hydrographique de canaux qui collectent et véhiculent l'eau liquide formée en surface. Cette partie propose d'étudier, sur la base du modèle de Poiseuille, l'écoulement d'un glacier sous l'effet de la gravité.

Données numériques utiles :	Masse volumique de la glace	$\rho_g = 0,917 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
	Masse volumique de l'eau liquide	$\rho_\ell = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
	Norme de l'accélération de la pesanteur	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

I. L'écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux newtonien de viscosité dynamique η , incompressible de masse volumique ρ , dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R et d'axe de symétrie de révolution (Ox). Il règne dans la conduite un gradient horizontal de pression noté $\frac{dp}{dx}$ (avec $\frac{dp}{dx} < 0$), supposé indépendant de x . En un point M de l'écoulement, la vitesse d'écoulement du fluide s'écrit : $\vec{v}(M) = v(r) \cdot \vec{e}_x$, où r est la distance entre le point M et l'axe (Ox) et \vec{e}_x un vecteur unitaire orientant l'axe (Ox) (voir **Figure 4** ci-contre).

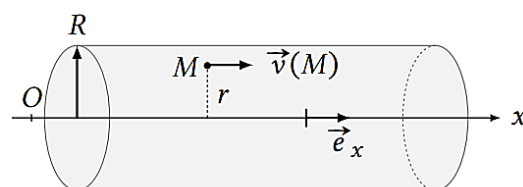


Figure 4 : Conduite cylindrique de rayon R et d'axe (Ox).

On admet que le fluide adhère aux parois de la conduite, ce qui se traduit par : $v(r = R) = 0$.

1. À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement appliqué à un système fermé à définir, établir l'expression suivante de la vitesse d'écoulement, en prenant soin d'explicitier chaque étape du raisonnement :

$$\vec{v}(M) = \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \vec{e}_x \tag{1}$$

La force de viscosité \vec{f}_v que le fluide situé à l'extérieur du cylindre de rayon r , de longueur L et d'axe (Ox) exerce sur le fluide contenu dans ce cylindre s'écrit : $\vec{f}_v = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \cdot \vec{e}_x$.

2. En déduire l'expression du débit de volume Q en fonction de R , η et $\frac{dp}{dx}$.
3. En déduire la dimension de la viscosité dynamique η en fonction des dimensions fondamentales suivantes : longueur, masse et temps.

II. Modélisation de l'écoulement de la Mer de glace

Document 1 : L'écoulement de la Mer de glace

Source : (http://www.geoglaciare.net/images/documents/Reynaud_Louis_Mer_de_glace.pdf) et Wikipédia

Les glaciers du massif du Mont Blanc s'étendent en France, Suisse et Italie ; ils couvrent quelque 150 km² (dont 110 km² en France). Le plus grand glacier des Alpes françaises est la Mer de glace : 12 km de longueur et 40 km² de superficie. La Mer de glace naît sur le plateau du Géant (de 3 600 m à 2 800 m d'altitude) et descend jusqu'à une altitude de 1 500 m. Sa pente moyenne est voisine de 11 °.

La répartition des vitesses en surface et dans une section transversale du Glacier du Tacul (tronçon de la Mer de glace à l'aplomb du refuge de l'Envers des Aiguilles) est représentée sur la figure suivante.

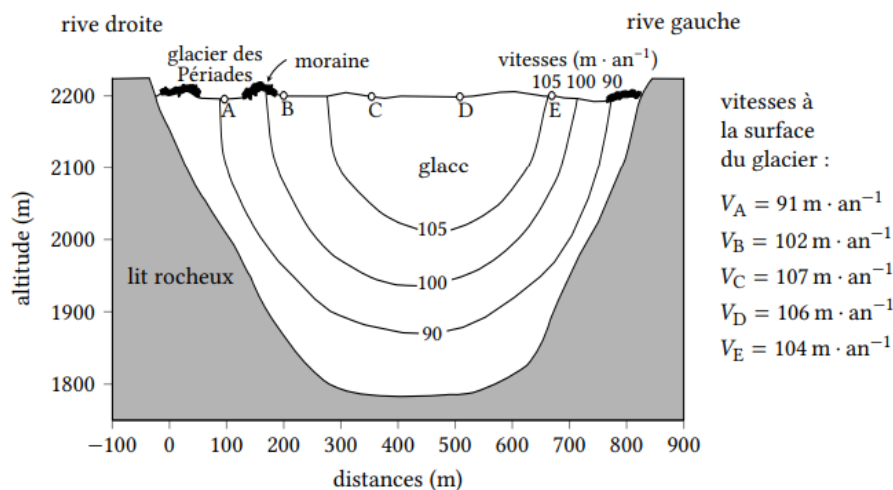


Figure 5 : Répartition des vitesses dans une section transversale du Glacier du Tacul.

La figure montre que la vitesse est pratiquement constante en surface au centre, par contre, elle varie très rapidement dans la centaine de mètres près des rives, pour tomber à quelques mètres par an de glissement sur les bords. En profondeur, les courbes d'égales vitesses peuvent être schématisées par des cercles concentriques.

On choisit de modéliser l'écoulement de la Mer de glace par l'écoulement de Poiseuille stationnaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible s'écoulant dans la moitié inférieure d'une conduite cylindrique sous le seul effet de la gravité, ce qui impose de remplacer dans l'expression (1) de la vitesse d'écoulement $\frac{dp}{dx}$ par $-\rho_g g \cdot \sin \alpha$, où ρ_g est la masse volumique de la glace, g la norme de l'accélération de la pesanteur et α l'angle qui mesure la pente moyenne de la Mer de glace.

4. À partir d'une analyse de la **figure 5**, proposer au moins un argument en faveur et au moins un argument en défaveur de ce choix de modélisation de l'écoulement du glacier par un écoulement de Poiseuille.

5. En utilisant les données quantitatives disponibles dans le **document 1** et en particulier sur la **figure 5**, proposer une estimation de l'ordre de grandeur de la viscosité dynamique de la glace. Comparer l'ordre de grandeur obtenu avec la valeur estimée usuelle de la viscosité de la glace de l'ordre de 10^{13} Pa·s. Commenter. *On attend ici une prise d'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées sur la copie. L'évaluation de la réponse tient autant compte de la démarche entreprise que des résultats obtenus.*

III. Régime d'écoulement du glacier des Bossons

On s'intéresse à l'écoulement du glacier des Bossons dans la vallée de Chamonix : l'altitude maximale du glacier est $h_{max} = 4\,700$ m et son altitude minimale $h_{min} = 1\,400$ m.

La pente moyenne du glacier, supposée constante, fait un angle $\alpha = 28^\circ$ avec l'horizontale ; son épaisseur supposée constante est $e = 120$ m et sa largeur supposée constante est $L = 1\,200$ m (suivant la direction (Oy) perpendiculaire au schéma - **Figure 6**). On adopte le système d'axes représenté ci-dessous : (Ox) est dirigé suivant la pente du glacier et (Oz) dirigé suivant la hauteur du glacier.

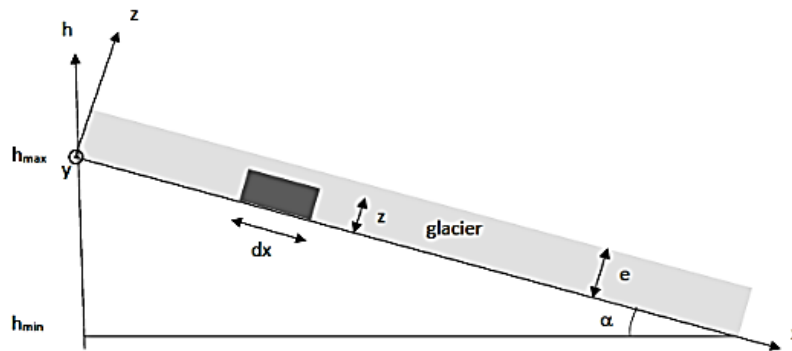


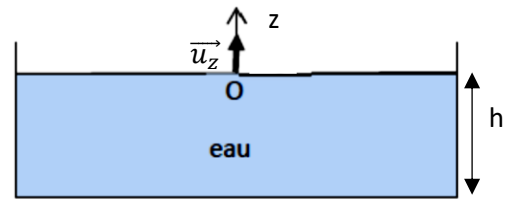
Figure 6 : Schéma de profil du glacier des Bossons.

En 1966 a eu lieu le crash d'un Boeing 707 d'Air India au sommet du glacier. Parmi la cargaison, des pierres précieuses ont été retrouvées au bas du glacier en 2013 par un randonneur chanceux.

6. Exprimer littéralement puis calculer numériquement en tonnes, la masse $m_{glacier}$ du glacier.
7. A l'aide des données, exprimer littéralement puis calculer numériquement la vitesse d'écoulement U du glacier en centimètre par jour.
8. Définir puis calculer le nombre de Reynolds Re associé à l'écoulement du glacier. Conclure sur la nature de l'écoulement.

Dans ce problème, on considère un bassin rempli d'eau sur une hauteur $h = 1,0 \text{ m}$. L'eau liquide sera considérée comme un fluide incompressible de masse volumique $\rho_e = 1\,000 \text{ kg.m}^{-3}$.

On définit un axe Oz ascendant, l'origine étant choisie au niveau de la surface de l'eau, ainsi qu'un vecteur unitaire dirigé vers le haut. L'accélération de la pesanteur sera notée g et sa valeur supposée constante : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.



Loi de pression hydrostatique

1.a. En considérant l'équilibre d'une couche d'eau de section S s'étendant entre les cotes z et $z+dz$, démontrer la loi de l'hydrostatique relative à la pression.

ρ_e étant constant, en déduire l'expression de la pression P en fonction de z . On notera P_0 la pression atmosphérique à la cote $z = 0$ où se trouve l'interface air-eau.

1.b. Quelle est la pression maximale à l'intérieur du bassin ?

Ordre de grandeur de la pression dans l'eau

2.a. Quelle est la valeur moyenne de la pression atmosphérique ? Donner le résultat en unités du système international.

2.b. Comparer numériquement la pression maximale dans le bassin et la pression atmosphérique.

2.c. Sur quelle profondeur faudrait-il plonger pour doubler la pression ? Le bassin serait-il assez profond ?

3. Énoncer et démontrer le principe d'Archimède.

Remontée d'une balle de ping-pong du fond du bassin

Une balle de ping-pong de masse $m = 2,3 \text{ g}$, de rayon $r = 1,9 \text{ cm}$ que l'on considèrera comme une sphère incompressible (enveloppe en celluloïd rigide) est lâchée depuis le fond du bassin en $z = -h$ sans vitesse initiale. Elle est repérée par sa cote $z(t)$. On rappelle que l'origine des z est prise à la surface. La balle est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède dans l'eau et à une traînée obéissant à la loi de Stokes $\vec{F} = -6\pi.\eta.r.\vec{v}$ où \vec{v} est le vecteur vitesse de la balle.

η est la viscosité dynamique du fluide ; elle a pour valeur $\eta = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. La loi de Stokes suppose, pour être appliquée, un écoulement de nombre de Reynolds inférieur à $0,1$.

4.a. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds et son unité.

4.b. Calculer la valeur numérique de la vitesse maximale admissible pour cette balle qui remonte si on veut pouvoir appliquer la loi de Stokes.

4.c. Écrire l'équation différentielle du mouvement de la balle et en déduire $v_z(t)$ puis $z(t)$. On définira un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression littérale. Exprimer la vitesse limite v_{lim} atteinte.

4.d. Décrire la méthode qui permet, à partir des données de position, de tracer l'allure de la vitesse au cours du temps à l'aide d'un langage de programmation.

4.e. Calculer numériquement τ et v_{lim} .

4.f. Commenter le résultat et montrer que l'on sort des conditions de validité de la loi de Stokes.

4.g. Au vu de la réponse précédente, que peut-on supposer comme relation entre la traînée et la vitesse ?

L'oscillation indéfinie et périodique d'un fluide comme l'eau impose un modèle négligeant les frottements. Mais, les interactions dans le fluide amènent en réalité des frottements. La modélisation précédente présente donc des limites. Néanmoins, l'eau demeure un corps qui glisse qu'on étudie ici.

Document 2 : Coefficient de frottement

Un solide glisse sur un plan horizontal fixe avec une vitesse \vec{v} . Ce solide subit de la part du support plan une réaction \vec{N} normale à la surface de contact et une force de frottement \vec{T} tangente à la surface de contact, colinéaire et de sens opposé à la vitesse \vec{v} . On appelle coefficient de frottement le rapport :

$$f = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$$

1. Écoulement de Couette plan.

Un liquide newtonien, de viscosité dynamique η , incompressible et indilatable, s'écoule entre deux plans infinis parallèles distants de h et orthogonaux à l'axe Oz de coordonnées (**Figure 4**). Le plan en $z = 0$ est immobile alors que le plan en $z = h$ est en translation rectiligne uniforme la vitesse \vec{v} dans la direction Ox de vecteur unitaire \vec{u}_x . On suppose que le régime permanent est atteint, que la pression est uniforme et que le profil de vitesse est linéaire selon Oz . On néglige les forces de pesanteur devant celles de viscosité.

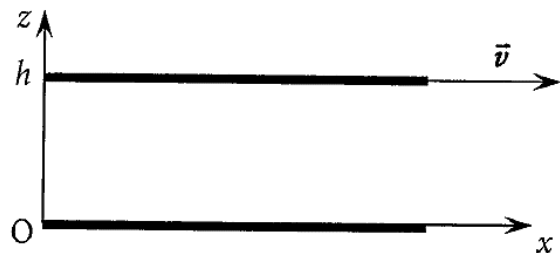


Figure 4. Cisaillement simple plan.

Notations : $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_x$; champ des vitesses dans le fluide : $\vec{V} = V(z) \cdot \vec{u}_x$

1.a. Rappeler la condition pour observer un régime laminaire.

On donne la force de viscosité de cisaillement sur un élément de surface dS pour un fluide newtonien en écoulement de cisaillement unidirectionnel selon Ox , laminaire et parallèle : $d\vec{F} = \eta \cdot \frac{dV(z)}{dz} \cdot dS \cdot \vec{e}_x$

1.b. A l'aide d'un bilan de quantité de mouvement appliqué à un système fermé à définir, établir le profil de la vitesse d'écoulement, en prenant soin d'explicitier chaque étape du raisonnement.

1.c. En déduire l'expression du débit de volume Q en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement. On pourra, si besoin, considérer des plans de largeur L selon la direction Oy .

2. Glissement et frottement sur la glace.

Un palet de hockey sur glace de masse m est lancé sur une surface plane de glace avec une vitesse initiale horizontale $v_0 \cdot \vec{u}_x$ dans la direction Ox de vecteur unitaire \vec{u}_x . Pour simplifier, on suppose que son mouvement est un mouvement de translation. On note v la composante sur Ox du vecteur vitesse \vec{v} du palet. Le palet a la forme d'un disque de 2,54 cm d'épaisseur et 7,62 cm de diamètre.

Données : $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $m = 170 \text{ g}$.

2.a. Faire l'inventaire des forces subies par le palet en négligeant les frottements de l'air et les représenter sur un schéma.

2.b. On suppose d'abord que la force de frottement \vec{T} est du type frottement fluide visqueux :

$\vec{T} = -\alpha \cdot \vec{v}$. Établir l'expression de la vitesse du palet en fonction du temps. Tracer l'allure du graphe correspondant.

2.c. On suppose dans cette question et les deux suivantes que le coefficient de frottement (voir **document 2**) est une constante. Exprimer la force de frottement et calculer numériquement son intensité. Donnée : $f = 0,02$.

2.d. Établir l'expression de la vitesse du palet en fonction du temps. Tracer l'allure du graphe correspondant.

2.e. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, établir l'expression de la distance parcourue par le palet avant de s'arrêter. Calculer numériquement cette distance..

Le système cardio-vasculaire a pour fonction d'apporter aux tissus et aux organes du corps l'oxygène et les nutriments nécessaires à leur fonctionnement, ainsi que de les débarrasser des déchets générés par leur métabolisme. Ces besoins étant très divers et variables dans le temps, le système cardiovasculaire doit pouvoir assurer la distribution sanguine de façon adaptée et ajustable dans une large plage de valeurs tout en étant capable de faire circuler le sang des artères jusqu'aux capillaires.

Nous nous proposons d'étudier un modèle simplifié d'écoulement sanguin permanent dans une artère modélisée par un tronçon cylindrique rigide. La présence d'une sténose, c'est-à-dire un rétrécissement de l'artère, sera étudiée dans un second temps.

1. Écoulement de Poiseuille cylindrique

L'écoulement du sang dans une artère peut être décrit en première approximation comme l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène dans un tronçon cylindrique horizontal d'axe (Ox), de rayon R et de longueur L, illustré sur la figure 1. On notera η la viscosité dynamique du fluide et ρ sa masse volumique. On suppose que l'écoulement est laminaire et unidirectionnel en régime permanent et que les phénomènes de pesanteur sont négligeables du fait de l'échelle du problème. Pour les applications numériques, la masse volumique du sang ρ sera prise égale à $1,06 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et la viscosité dynamique η à 6 mPa.s.

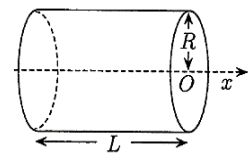


Figure 1 – Artère

- 1.1.** Donner la définition d'une ligne de courant et d'un écoulement incompressible. Expliquer ce qu'est un écoulement laminaire et ce qu'est un écoulement turbulent. Donner l'expression du nombre de Reynolds R_e et l'ordre de grandeur de R_e qui permet de différencier les régimes d'écoulement laminaire et turbulent dans un tronçon cylindrique.
- 1.2.** Définir le débit de volume Q_V et le débit de masse Q_m . En régime permanent, justifier le caractère conservatif d'un flux de masse. Écrire la condition pour que le débit de volume et le débit de masse d'un fluide soient proportionnels. Donner la relation qui relie ces deux grandeurs dans cette situation.

Le profil de vitesse dans ce tronçon cylindrique de rayon R, de longueur L et d'axe suivant \vec{e}_x est un écoulement de Poiseuille et a ainsi pour expression :

$$\vec{v} = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} (R^2 - r^2) \vec{e}_x$$

où $\Delta P = P(x=0) - P(x=L) > 0$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie du tronçon cylindrique. On note r la coordonnée radiale, c'est-à-dire la distance à l'axe (Ox).

- 1.3.** Expliquer pourquoi on peut chercher un profil de vitesse sous la forme $\vec{v} = v(r) \cdot \vec{e}_x$. Justifier que ΔP est positif.
- 1.4.** Écrire la condition aux limites que doit respecter le champ des vitesses et représenter graphiquement ce champ des vitesses.
- 1.5.** Exprimer le débit de volume Q_V en fonction de η , R , ΔP et L . Etablir l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement v_m .

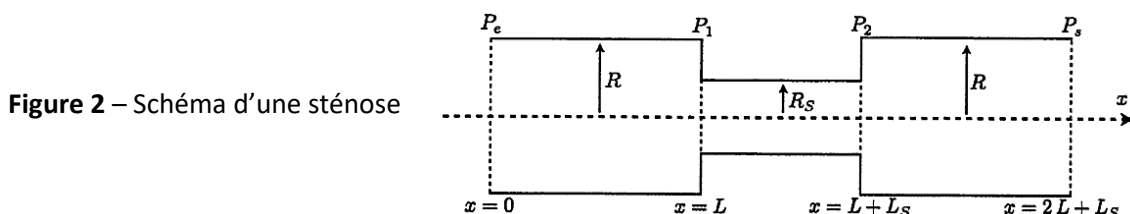
- 1.6. Définir la résistance hydraulique du tube R_{Hy} et l'exprimer en fonction de la différence de pression ΔP et du débit de volume Q_V . Donner son expression en fonction de la longueur du tube L , de son rayon R et de la viscosité du fluide η .
- 1.7. Application à la circulation sanguine : on considère un tronçon cylindrique modélisant une artère de rayon R , de longueur L , auquel est appliquée une différence de pression ΔP . Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement v_m . Le modèle utilisé est-il bien valide ?

Données : $R = 6 \text{ mm}$; $L = 8 \text{ cm}$; $\Delta P = 40 \text{ Pa}$

2. Modélisation d'une sténose

Une sténose correspond à une réduction brutale et localisée du diamètre d'un vaisseau sanguin. Schématiquement, cette situation peut être représentée comme étant la superposition de trois tronçons cylindriques, de même axe, et de rayons différents, R , R_S et R comme illustré sur la figure 2. La sténose correspond au tronçon de plus faible rayon et est située entre les abscisses $x = L$ et $x = L + L_S$.

- 2.1. Représenter schématiquement les lignes de courant entre $x = 0$ et $x = 2L + L_S$.
- 2.2. On note Q_1 , Q_2 et Q_3 les débits de volume à travers les sections situées respectivement en $x = 0$, $x = L + L_S/2$ et $x = 2L + L_S$. Donner en justifiant la(les) relation(s) qui lie(nt) ces différents débits et le débit de volume total Q_V dans le vaisseau sanguin. En déduire la conséquence de ce résultat sur la vitesse moyenne du fluide au niveau de la zone sténosée entre $x = L$ et $x = L + L_S$.
- 2.3. Donner la relation liant la résistance hydraulique totale R_{Hy_tot} en fonction du débit total dans le vaisseau sanguin Q_V et la différence de pression entre l'entrée et la sortie P_e et P_s (avec $P_e > P_s$).



Exprimer la résistance hydraulique totale en fonction de la résistance hydraulique de chaque sous-partie, R_{Hy_1} , R_{Hy_2} et R_{Hy_3} .

- 2.4. Déterminer la différence de pression de part et d'autre de la sténose $P_2 - P_1$ en fonction des différentes résistances hydrauliques et de la différence de pression totale $P_s - P_e$.
- 2.5. Application numérique : on considère une artère de rayon R , de longueur totale $2L + L_S$, à laquelle est appliquée une différence de pression ΔP . Une sténose se développe dans cette artère et conduit à un rétrécissement local de l'artère sur une distance L_S où le rayon de l'artère devient R_S . Déterminer la vitesse moyenne dans la zone sténosée. En déduire le nombre de Reynolds dans chaque partie de l'artère. Déduire une information sur la nature de l'écoulement. Préciser quelle méthode peut être utilisée pour diagnostiquer une sténose.

Données : $R = 6 \text{ mm}$; $2L + L_S = 8 \text{ cm}$; $\Delta P = 40 \text{ Pa}$; $L_S = 1 \text{ cm}$; $R_S = 2 \text{ mm}$

Rappels de cours : loi de Poiseuille et résistance hydraulique – Application

1.1. Un tronçon cylindrique de rayon R et de longueur L est traversé par un fluide de viscosité η et de masse volumique μ . Les phénomènes de pesanteur sont négligés dans l'étude.

Rappeler la loi de Poiseuille reliant le débit de volume Q à la différence de pression aux extrémités du cylindre. Préciser les conditions de validité de cette loi.

1.2. Le terme Q représentant le débit de volume à travers la section droite S , on définit R_{Hy} , résistance hydrodynamique, par la relation $P_0 - P_L = R_{Hy}Q$, où P_0 et P_L sont respectivement les pressions à l'entrée et à la sortie du tronçon cylindrique.

Exprimer la résistance hydraulique R_{Hy} en fonction de L , R et η .

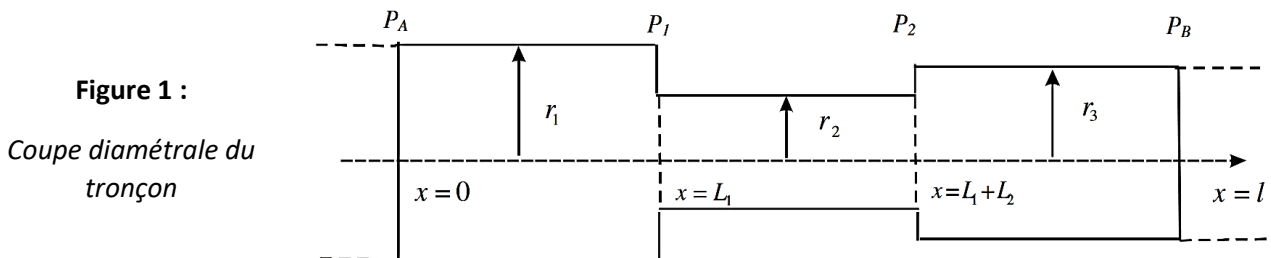
1.3. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds Re .

Rappeler le domaine dans lequel se situe la valeur de Re pour un écoulement de Poiseuille.

Déduire une condition portant sur le rayon R et calculer sa valeur.

Données : vitesse moyenne $v_{moy} = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$ viscosité dynamique $\eta = 10^{-3} \text{ P}\ell$
 masse volumique $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

1.4. Un tronçon est, à présent, constitué de trois portions cylindriques, de même axe, associées en série, de rayons r_1 , r_2 et r_3 et de résistances hydrodynamiques respectives R_{Hy1} , R_{Hy2} et R_{Hy3} (figure 1). La première portion est comprise entre $x_0 = 0$ et $x_1 = L_1$, la deuxième portion est comprise entre $x_1 = L_1$ et $x_2 = L_1 + L_2$ et la troisième portion est comprise entre $x_2 = L_1 + L_2$ et $x_3 = \ell$. P_A , P_1 , P_2 et P_B sont les pressions en $x_0 = 0$, $x_1 = L_1$, $x_2 = L_1 + L_2$ et $x_3 = \ell$ respectivement. Les pertes de charges au niveau des raccordements sont négligées.



Les débits volumiques Q_A , Q_1 , Q_2 et Q_B sont définis au travers des sections $x_0 = 0$, $x_1 = L_1$, $x_2 = L_1 + L_2$ et $x_3 = \ell$ respectivement.

Quelle(s) relation(s) existe-t-il entre les débits Q_A , Q_1 , Q_2 et Q_B ?

On pose $Q_A = Q$.

Montrer que l'on peut écrire $P_A - P_B = R_{Hy} \cdot Q$ où R_{Hy} est la résistance hydrodynamique de l'ensemble du tronçon.

Exprimer R_{Hy} en fonction de R_{Hy1} , R_{Hy2} et R_{Hy3} .

Expliciter brièvement une analogie avec un problème d'électrocinétique et préciser l'équivalence entre grandeurs physiques décrivant l'écoulement d'un fluide ou celui de porteurs de charges.

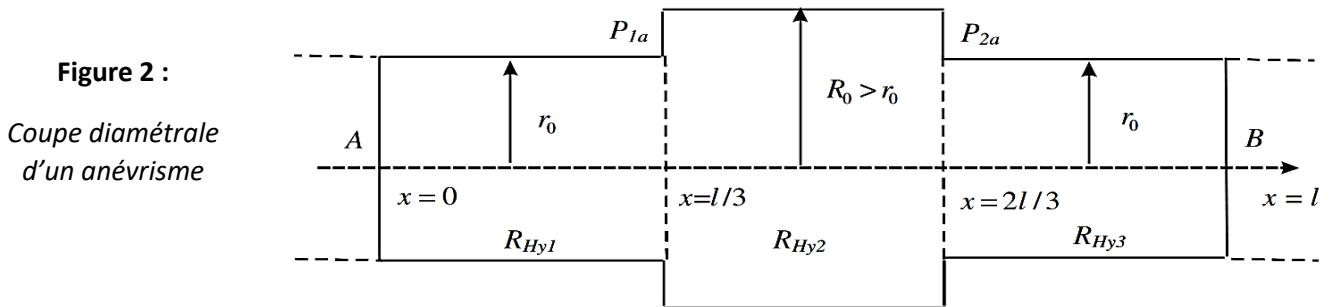
1.5. Déduire l'expression de $P_1 - P_2$ en fonction de R_{Hy1} , R_{Hy2} , R_{Hy3} et $P_A - P_B$.

Étude d'un anévrisme

2.1. Un vaisseau sain est modélisé par un tronçon cylindrique horizontal de longueur $AB = \ell$ et de rayon constant r_0 parcouru par le sang de viscosité η . Dans toute la suite, la perte de charge $\Delta P = P_A - P_B$ est supposée constante, le générateur cardiaque fournit la même énergie. Préciser l'expression de la résistance hydraulique R_{Hy} du vaisseau sain.

Établir l'expression du débit volumique sanguin Q en fonction de η, ℓ, r_0 et ΔP .

2.2. Le tiers central d'un tronçon de vaisseau de longueur ℓ est le siège d'un anévrisme. Dans cette portion centrale, le rayon moyen R_0 est plus grand que le rayon moyen r_0 du reste du tronçon. Le vaisseau est partagé en trois portions de même longueur $\ell/3$ et de résistances hydrauliques respectivement notées : R_{Hy1}, R_{Hy2} et R_{Hy3} . La figure 2 représente la coupe diamétrale du vaisseau atteint d'anévrisme



Préciser les expressions des résistances hydrauliques R_{Hy1}, R_{Hy2} et R_{Hy3} en fonction de la résistance hydraulique R_{Hy} du vaisseau sain et des rayons R_0 et r_0 .

Q_a est le nouveau débit volumique sanguin dans le vaisseau atteint d'anévrisme.

Préciser l'expression de Q_a en fonction du débit volumique sanguin Q dans le vaisseau sain, et des rayons R_0 et r_0 . Comparer Q_a à Q .

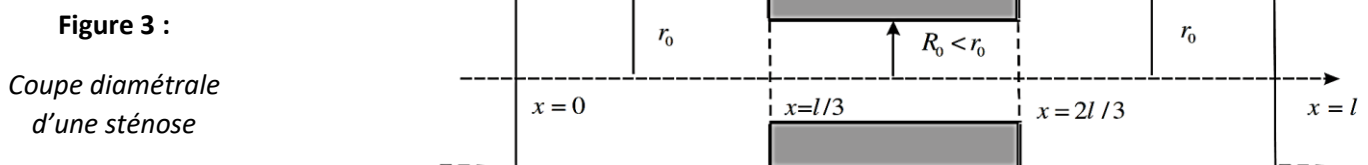
P_{1a} et P_{2a} sont les nouvelles pressions, respectivement, en $x = \ell/3$ et $x = 2\ell/3$, dans le vaisseau atteint d'anévrisme.

Exprimer $P_{1a} - P_{2a}$ en fonction de la perte de charge ΔP et des rayons R_0 et r_0 .

Comparer $P_{1a} - P_{2a}$ à $\Delta P/3$ et évoquer un effet possible de l'anévrisme sur la personne à partir de ce résultat.

Étude d'une sténose – Pontage

3.1. Le tiers central d'un tronçon d'artère de longueur ℓ est le siège d'une sténose. Dans cette portion centrale, le rayon intermédiaire R_0 est plus petit que le rayon r_0 de l'artère non altérée. Le tronçon d'artère de longueur ℓ est partagé en trois portions de même longueur $\ell/3$. La figure 3 représente la coupe diamétrale du vaisseau atteint d'une sténose.



Déduire la nouvelle résistance hydraulique R_{Hs} de l'artère sténosée. Exprimer le résultat sous la forme $R_{Hs} = \alpha \cdot R_{Hy}$, où R_{Hy} est la résistance hydraulique de l'artère saine et α un coefficient de proportionnalité. Expliciter α en fonction de R_0 et r_0 .

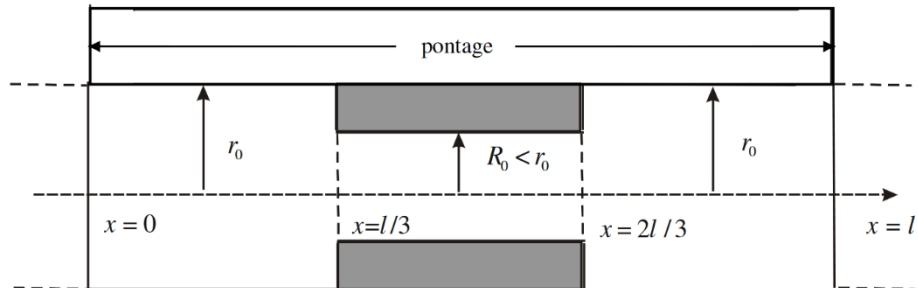
Q_s est le nouveau débit volumique sanguin dans l'artère atteinte de sténose.

Préciser l'expression de Q_s en fonction de Q et des rayons R_0 et r_0 puis en fonction de Q et α .

Comparer Q_s à Q . Quelle conséquence physiologique est déduite de ce résultat ?

3.2. Un pontage est réalisé afin de réparer une artère sténosée. Le pontage consiste à contourner l'obstacle à l'aide d'une tubulure mise en parallèle sur la totalité du tronçon. R_{Hp} est la résistance hydraulique du pontage de longueur ℓ . La figure 4 représente la coupe diamétrale du pontage.

Figure 4 :
Coupe diamétrale
du pontage



Préciser le schéma électrique équivalent en explicitant brièvement le choix.

Établir l'expression de la résistance hydraulique R_{He} équivalente de l'artère pontée en fonction de R_{Hy} , α et R_{Hp} .

3.3. Quelle doit être la valeur de R_{Hp} afin de rétablir le débit volumique sanguin à sa valeur en l'absence de sténose ? Exprimer, dans ce cas, R_{Hp} en fonction de R_{Hy} et α .

3.4. Déterminer l'expression du rayon r_p de la tubulure de pontage permettant de rétablir le débit volumique sanguin à sa valeur en l'absence de sténose, en fonction de R_0 et r_0 .

Fluide Réel 6 : CHUTE VERTICALE D'UNE BILLE

Soit un tube cylindrique rempli de glycérine, liquide incompressible de masse volumique $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\eta = 0,9 \text{ P}\ell$. En haut du tube, on laisse tomber une petite sphère homogène rigide, une bille en verre par exemple, de rayon $r = 1,0 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho' = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Au bout d'un certain temps, la sphère acquiert une vitesse limite \mathbf{U} , ce qui correspond à un mouvement rectiligne uniforme.

La force de traînée \vec{F} a pour norme $\|\vec{F}\| = F = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho \cdot S \cdot v^2$ avec S la surface de frottements entre l'objet et le fluide, v la vitesse relative de l'objet sphérique par rapport au fluide.

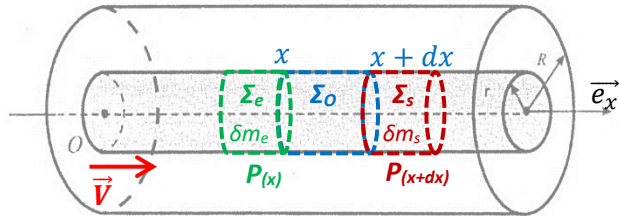
- Quel type d'écoulement peut-on supposer lors de la chute de la bille dans ce fluide visqueux ?
- Exprimer \mathbf{U} en fonction de r , ρ , ρ' , η et du champ de pesanteur d'intensité \mathbf{g} . On prendra $C_x = 24/Re$.
- Calculer \mathbf{U} .
- Evaluer le nombre de Reynolds R de l'écoulement considéré. Commenter le résultat obtenu.

CORRECTION Entraînement au concours_Mécanique des fluides REELS

Fluide réel 1 : Quelques propriétés hydrodynamiques des glaciers (Agro23-G2E23) 45min

1. Soit le système fermé constitué par le { fluide contenu dans le volume ($\Sigma_o + \Sigma_e$) à l'instant t qui s'écoule dans ($\Sigma_o + \Sigma_s$) à $t+dt$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_{\text{sys fermé}}(t) &= \vec{p}_{\Sigma_o}(t) + \delta\vec{p}_{\text{entrant}} \\ \vec{p}_{\text{sys fermé}}(t+dt) &= \vec{p}_{\Sigma_o}(t+dt) + \delta\vec{p}_{\text{sortant}} \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{sys fermé}}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{\Sigma_o}}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt} \cdot \vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{dt} \cdot \vec{v}_e$$



D'après la seconde loi de Newton pour un système fermé :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{sys fermé}}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} \\ \Rightarrow \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\Sigma_o}}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt} \cdot \vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{dt} \cdot \vec{v}_e = \frac{d\vec{p}_{\Sigma_o}}{dt} + D_{m,s} \cdot \vec{v}_s - D_{m,e} \cdot \vec{v}_e \quad (\text{Théorème d'Euler})$$

Pour un régime permanent, la quantité de mouvement ne varie pas et le débit de masse se conserve :

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} + D_m \cdot \vec{v}_s - D_m \cdot \vec{v}_e = \vec{0} + D_m \cdot (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

La vitesse ne dépend que de « r » (écoulement laminaire cylindrique) donc pour un même rayon :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_s \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Bilan des forces :

* On néglige la pesanteur devant les forces pressantes en entrée et sortie ;

* la force de viscosité sur la paroi latérale cylindrique : $d\vec{f}_v = 2\pi r \cdot dx \cdot \eta \frac{dv}{dr} \cdot \vec{e}_x$

* la force pressante en entrée sur la section : $\vec{F}_{\text{press}_e} = P_{(x)} \cdot (\pi \cdot r^2) \cdot \vec{e}_x$

* la force pressante en sortie sur la section : $\vec{F}_{\text{press}_s} = -P_{(x+dx)} \cdot (\pi \cdot r^2) \cdot \vec{e}_x$

$$\Rightarrow 2\pi r \cdot dx \cdot \eta \frac{dv}{dr} \cdot \vec{e}_x + P_{(x)} \cdot (\pi \cdot r^2) \cdot \vec{e}_x - P_{(x+dx)} \cdot (\pi \cdot r^2) \cdot \vec{e}_x = \vec{0}$$

Sur Ox :
$$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta \cdot dx} \cdot (P_{(x+dx)} - P_{(x)}) = \frac{r}{2\eta \cdot dx} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot dx = \frac{r}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dx}$$

En intégrant entre r et R (avec $V(R) = 0$ car en contact contre une paroi) : $v(R) - v(r) = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right)$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dP}{dx} (r^2 - R^2) \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{v}(M) = v(r) \cdot \vec{e}_x = \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \vec{e}_x}$$

2.
$$Q = \int_0^R v(r) \cdot dS = \int_0^R \left[\frac{r^2 - R^2}{4\eta} \cdot \frac{dP}{dx} \right] \cdot d(\pi r^2) = \int_0^R \left[\frac{r^2 - R^2}{4\eta} \cdot \frac{dP}{dx} \right] \cdot 2\pi r \cdot dr = \left(\frac{\pi}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dx} \right) \times \int (r^3 - R^2 \cdot r) \cdot dr$$

$$Q = \left(\frac{\pi}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dx} \right) \times \left[\frac{r^4}{4} - R^2 \cdot \frac{r^2}{2} \right]_0^R = \boxed{- \left(\frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{dP}{dx} \right) \times R^4}$$

3.
$$\dim[\eta] = \dim \left[\left(\frac{\pi}{8} \cdot \frac{dP}{dx} \right) \times R^4 \times \frac{1}{Q} \right] = \dim \left[\frac{dP}{dx} \right] \times \frac{\dim[R^4]}{\dim[Q]} = \frac{(M \cdot L \cdot T^{-2}) \cdot L^{-2}}{L} \times \frac{L^4}{L^3 T^{-1}} = \underline{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}}$$

La viscosité dynamique s'exprime en $\underline{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$.

4. L'écoulement de poiseuille pour décrire le déplacement du glacier semble être un modèle satisfaisant puisque :
- la vitesse est maximale au centre de l'écoulement et pratiquement nulle sur les bords ;
 - dans une section droite de l'écoulement, la vitesse ne dépend que de la distance au centre (r) avec des vitesse uniformes dessinant des demi-cercles concentriques.

Cependant, sur une section droite, la variation de vitesse ne semble pas vraiment suivre un profil parabolique avec des valeurs qui varient peu à partir d'une centaine de mètres de la paroi.

D'ailleurs, cette paroi du lit rocheux n'apparaît pas vraiment circulaire et donc l'écoulement laminaire n'est plus cylindrique à proximité de la paroi.

5. Vu le profil de vitesse, on peut estimer que la vitesse maximale au centre avoisine :

$$v_{\max} = 110 \text{ m. an}^{-1} = \frac{110}{365,25 \times 24 \times 60 \times 60} \text{ m. s}^{-1}$$

Or, en tenant compte de la gravité comme moteur de l'écoulement : $v(r) = \frac{1}{4\eta} \cdot (-\rho_g g \cdot \sin \alpha)(r^2 - R^2)$

$$\text{D'où : } v_{\max} = v(0) = \frac{1}{4\eta} \cdot (-\rho_g g \cdot \sin \alpha)(-R^2) = \frac{1}{4\eta} \cdot (\rho_g g \cdot \sin \alpha) \cdot R^2$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{1}{4 \cdot v_{\max}} \cdot (\rho_g g \cdot \sin \alpha) \cdot R^2 = \frac{1}{4 \times \left(\frac{110}{365,25 \times 24 \times 60 \times 60}\right)} \times (917 \times 9,8 \times \sin(11)) \times \left(\frac{800}{2}\right)^2 = \underline{2,0 \cdot 10^{13} \text{ Pa}\cdot\text{s}}$$

On retrouve effectivement un bon ordre de grandeur de la viscosité autour de 10^{13} Pa.s.

Le modèle utilisé apparaît pertinent au vu de la symétrie cylindrique, pour l'écoulement permanent de la glace, un fluide considéré comme newtonien. La valeur très élevée de la viscosité impose un nombre de Reynolds très inférieur à l'unité et donc un écoulement rampant.

6. Le glacier est assimilé à un parallélépipède :

$$m_{\text{glacier}} = \rho_g \cdot V_{\text{glacier}} = \rho_g \cdot (e \cdot L \cdot \text{hypothénuse}) = \rho_g \cdot \left(e \cdot L \cdot \frac{h_{\max} - h_{\min}}{\sin \alpha}\right)$$

$$m_{\text{glacier}} = 917 \times \left(120 \times 1200 \times \frac{4700 - 1400}{\sin(18)}\right) = \underline{928 \cdot 10^9 \text{ kg} = 928 \cdot 10^6 \text{ tonnes}}$$

7. L'énoncé indique que les pierres précieuses ont parcouru la longueur du glacier en 47 ans (2013-1966) ainsi :

$$U = \frac{\left(\frac{h_{\max} - h_{\min}}{\sin \alpha}\right)}{\text{durée}} = \frac{\frac{4700 - 1400}{\sin(18)}}{47 \times 365,25} = \underline{0,41 \text{ m. jour}^{-1} = 41 \text{ cm. jour}^{-1}}$$

$$8. \text{Re} = \frac{\rho_g \cdot v_{\text{moy}} \cdot \ell}{\eta_g} = \frac{\rho_g \cdot U \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{\eta_g} = \frac{917 \times 4,7 \cdot 10^{-6} \times \left(\frac{1200}{2}\right)}{10^{13}} = 2,6 \cdot 10^{-13} \ll 1$$

L'écoulement du glacier est bien rampant.

1.a. **Système :** {cylindre d'eau de section S et entre les altitudes z et z+dz}

Bilan des forces :
 * poids du fluide : $\vec{F}_{\text{pesanteur}} = m \cdot \vec{g}_0 = -\rho_e \cdot (S \cdot dz) \cdot g_0 \cdot \vec{e}_z$
 * forces pressantes : $\vec{F}_{(z+dz)} = -P_{(z+dz)} \cdot S \cdot \vec{e}_z$ $\vec{F}_{(z)} = +P_{(z)} \cdot S \cdot \vec{e}_z$

A l'équilibre : $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} = -\rho_e \cdot (S \cdot dz) \cdot g_0 \cdot \vec{e}_z - P_{(z+dz)} \cdot S \cdot \vec{e}_z + P_{(z)} \cdot S \cdot \vec{e}_z$

Sur Oz : $P_{(z+dz)} - P_{(z)} = -\rho_e \cdot g_0 \cdot dz = dP/dz \cdot dz \Rightarrow dP = -\rho_e \cdot g_0 \cdot dz$

Avec $\rho_e = \text{cst}$: en intégrant entre 0 et z : $P = P_0 - \rho_e \cdot g \cdot z$

1.b. La pression diminue vers le bas donc : $P_{\text{max}} = P(-h) = P_0 + \rho_e \cdot g_0 \cdot h$

2.a. $P_{\text{atm}} = 1,013 \text{ bar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2.b. $P_{\text{max}} / P_{\text{atm}} = 1 + \rho_e \cdot g \cdot h / P_0 = 1 + 10^3 \times 9,8 \times 1,0 / 1,013 \cdot 10^5 = 1,1$ La pression augmente de 10 %.

2.c. Pour doubler la pression : $P_{x2} = 2 \cdot P_0 = P_0 + \rho_e \cdot g \cdot (Z_{x2}) \Rightarrow Z_{x2} = 10 \text{ m}$

La pression doublerait à 10 m de profondeur. La bassin n'est assez profond pour cela.

3. Tout corps plongé dans un fluide en équilibre est soumis à une force de poussée verticale ascendante égale au poids du fluide déplacé : $\vec{\Pi}_A = -\rho_{fl} \cdot V \cdot \vec{g}$

Démonstration : Soit un système de volume V immergé dans un fluide de masse volumique ρ_{fl} .

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{\Pi}_A = \vec{0} \Rightarrow$ Selon l'axe vertical : $\vec{\Pi}_A = -\vec{P} = -m \cdot \vec{g} = -(\rho_{fl} \cdot V) \cdot \vec{g}$

4.a. $R_e = \rho_e \cdot v_{\text{moy}} \cdot (2r) / \eta$ sans dimension

4.b. $v_{\text{moy}} = R_e \cdot \eta / (2\rho_e r) = 0,1 \times 10^{-3} / (2 \times 10^3 \times 1,9 \cdot 10^{-2}) = 2,10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$

La balle ne doit pas remonter plus vite cette valeur si on veut pouvoir appliquer la loi de Stokes.

4.c. **Bilan des forces :**
 le poids du système $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_z$
 la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = -m_{\text{fluide}} \cdot \vec{g} = +(\rho_e \cdot \frac{4}{3} \pi r^3) \cdot g \cdot \vec{e}_z$
 les forces de frottements $\vec{F} = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot \vec{v} = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \cdot \vec{e}_z$

P.F.D : Dans un référentiel galiléen : $\Sigma \vec{f}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_z = \vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{F}$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_z = -m \cdot g \cdot \vec{e}_z + (\rho_e \cdot \frac{4}{3} \pi r^3) \cdot g \cdot \vec{e}_z - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \cdot \vec{e}_z$$

Sur Oz : $\frac{dv}{dt} + \frac{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}{m} \cdot v = \left(\frac{4 \cdot \rho_e \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot m} - 1 \right) \cdot g$ avec $\tau = m / (6\pi \cdot \eta \cdot r)$

$\Rightarrow v_z(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + (2\rho_e r^2 / 9\eta - \tau) \cdot g = (2\rho_e r^2 / 9\eta - \tau) \cdot g \cdot (1 - e^{-t/\tau})$ (avec $v_{(t=0)} = 0$)

Or : $v = dz/dt \Rightarrow \int_{-h}^z dz = z(t) + h = \int_0^t v \cdot dt = (2\rho_e r^2 / 9\eta - \tau) \cdot g \times t + (2\rho_e r^2 / 9\eta - \tau) \cdot g \cdot \tau \cdot (e^{-t/\tau} - 1)$

$\Rightarrow z(t) = (2\rho_e r^2 / 9\eta - \tau) \cdot g \cdot (t + \tau \cdot e^{-t/\tau} - \tau) - h$

A la limite : $(dv/dt = 0) \quad v_{\text{lim}} = (2\rho_e r^2 / 9\eta - \tau) \cdot g$

4.d. Pour calculer la vitesse au cours du temps à l'aide d'un langage de programmation à partir des données sur la position, on utilise la **méthode d'Euler** : $v = dz/dt \approx [z(t+h) - z(t)] / h$

h constitue le pas, on le choisit le + petit possible pour s'approcher au plus proche de la vitesse instantanée.

4.e. $\tau = 6,4 \text{ s} \quad v_{\text{lim}} = 7,2 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$

4.f. La valeur de la vitesse limite dépasse largement la vitesse maximale d'application de la loi de Stokes : le modèle n'est pas satisfaisant.

4.g. La vitesse limite dépasse largement la vitesse maximale, on peut supposer un régime turbulent donc que la traînée est quadratique en vitesse « $f = \alpha \cdot v^2$ ».

1.a. L'écoulement est considéré comme laminaire si le flux diffusif (orthogonal à l'écoulement) l'emporte sur le flux convectif (colinéaire à l'écoulement). Le nombre de Reynolds est alors inférieur à 2 000 = Re_{critique}.

1.b. On considère comme système fermé :

{fluide contenu dans le volume ($\Sigma_o + \Sigma_e$) à l'instant t

$$\vec{p}_{sys\ fermé}(t) = \vec{p}_{\Sigma_o}(t) + \vec{p}_{entrant} = \vec{p}_{\Sigma_o}(t) + \delta m_e \cdot \vec{V}_e$$

$$\vec{p}_{sys\ fermé}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_o}(t + dt) + \vec{p}_{sortant} = \vec{p}_{\Sigma_o}(t + dt) + \delta m_s \cdot \vec{V}_s$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{sys\ fermé}(t + dt) - \vec{p}_{sys\ fermé}(t) = \vec{p}_{\Sigma_o}(t + dt) - \vec{p}_{\Sigma_o}(t) + \delta m_s \cdot \vec{V}_s - \delta m_e \cdot \vec{V}_e$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_{sys\ fermé}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{\Sigma_o}}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt} \cdot \vec{V}_s - \frac{\delta m_e}{dt} \cdot \vec{V}_e$$

Or, d'après la seconde loi de Newton pour un système fermé :

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{\Sigma_o}}{dt} + D_{m,s} \cdot \vec{V}_s - D_{m,e} \cdot \vec{V}_e$$

$$\frac{d\vec{p}_{sys\ fermé}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

(Théorème d'Euler)

Pour un régime permanent, la quantité de mouvement ne varie pas dans Σ_o et le débit de masse se conserve :

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} + D_{m,s} \cdot (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

La vitesse ne dépend que de « z ». Pour une même hauteur (z) en entrée et en sortie : $\vec{V}_e = \vec{V}_s$

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Bilan des forces : * On néglige la force de pesanteur devant celles de forces de viscosité.

* La force de viscosité de la couche supérieure : $d\vec{F}_{z+dz} = \eta \cdot \frac{dV(z+dz)}{dz} \cdot (L \cdot dx) \cdot \vec{e}_x$

* La force de viscosité de la couche inférieure : $d\vec{F}_z = -\eta \cdot \frac{dV(z)}{dz} \cdot (L \cdot dx) \cdot \vec{e}_x$

* La pression est uniforme donc les forces pressantes en entrée et sortie se compensent.

$$\Rightarrow \eta \cdot \frac{dV(z+dz)}{dz} \cdot (L \cdot dx) \cdot \vec{e}_x - \eta \cdot \frac{dV(z)}{dz} \cdot (L \cdot dx) \cdot \vec{e}_x = \vec{0} = \eta \cdot \frac{d^2V(z+dz)}{dz^2} \cdot dz \cdot (L \cdot dx) \cdot \vec{e}_x$$

Sur Ox : $\frac{d^2V(z+dz)}{dz^2} = 0$ En intégrant : $V = a \cdot z + b$

Avec les conditions aux limites : $V(0) = 0 = a \times 0 + b = b$ & $V(h) = v = a \times h + b$

$$\Rightarrow \underline{V = \left(\frac{v}{h}\right) \cdot z}$$
 Le profil de la vitesse d'écoulement est linéaire.

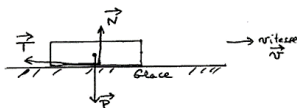
1.c. $Q = \int V(z) \cdot dS = \int \left(\frac{v}{h}\right) \cdot z \cdot d(L \cdot z) = \left(\frac{v}{h} \cdot L\right) \cdot \int z \cdot dz = \left(\frac{v}{h} \cdot L\right) \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \frac{v \cdot L \cdot h}{2} = \frac{v \cdot S}{2} = V_{moy} \cdot S$

2.a. Bilan des forces appliquées au palet :

* poids du palet : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

* réaction normale de la glace : \vec{N}

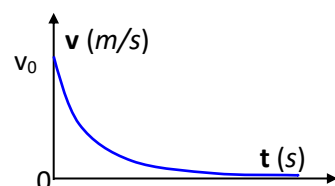
* frottements sur la glace : \vec{T}



2.b. Dans le référentiel de la glace, supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_x = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = -m \cdot g \cdot \vec{u}_z + N \cdot \vec{u}_z - \alpha \cdot v \cdot \vec{u}_x$$

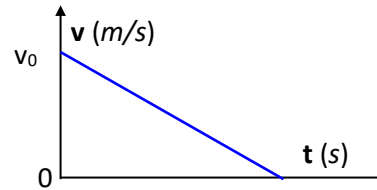
Sur Ox : $\frac{dv}{dt} = \left(-\frac{\alpha}{m}\right) \cdot v \Rightarrow v = A \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{m}\right)t} = v_0 \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{m}\right)t}$



2.c. D'après le document 2 : $T = \|\vec{T}\| = f \cdot \|\vec{N}\| = f \cdot N$ } $T = f \cdot mg$
 En projetant sur Oz l'équation précédente : $N = mg$ } $T = 0,02 \times 0,170 \times 9,8 = \underline{0,03 \text{ N}}$

2.d. On a toujours sur Ox : $m \cdot \frac{dv}{dt} = -T = -f \cdot mg$

=> $v = (-fg) \cdot t + v_0$



2.e. Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = E_{c(\text{fin})} - E_{c(0)} = \Sigma W(\vec{F}_{\text{ext}})$

Seule la force de frottement travaille car les autres sont orthogonales au déplacement :

$\Sigma W(\vec{F}_{\text{ext}}) = W(\vec{T}) = \int \vec{T} \cdot d\vec{\ell} = \int -fmg \cdot \vec{u}_x \cdot d\ell \cdot \vec{u}_x = -fmg \cdot \int d\ell = -fmg \cdot d$

=> $E_{c(\text{fin})} - E_{c(0)} = 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = -fmg \cdot d \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2gf} = \frac{20^2}{2 \times 9,81 \times 0,02} = \underline{1 \cdot 10^3 \text{ m}}$

Fluide réel 4 : Ecoulement sanguin (Agro 2016) 1h

1.1. Une ligne de courant est une courbe tangente aux vecteurs vitesses en tout point.

Un écoulement est incompressible lorsque la masse volumique du fluide est considérée constante en tout point de l'écoulement.

Dans un écoulement laminaire, les lignes de courant ne se croisent pas, elles sont parallèles, ce qui n'est pas le cas dans un écoulement turbulent.

Le nombre de Reynolds pour une conduite cylindrique a pour expression : $R_e = \rho \cdot v_{\text{moy}} \cdot (2R) / \eta$
 Le régime est laminaire si $R_e < 2000$ environ, turbulent sinon.

1.2. Le débit de volume est le volume qui traverse une section droite par unité de temps : $D_v = \delta V / dt$

Le débit de masse est la masse qui traverse une section droite par unité de temps : $D_m = \delta m / dt$

Le système est ouvert : on considère une surface de contrôle Σ constitué par le sang dans l'artère avec le sang qui y entre à « t » et celui qui en sort à « t+dt » :

A « t » : $m(t) = m_\Sigma(t) + \delta m_e$
 A « t+dt » : $m(t+dt) = m_\Sigma(t+dt) + \delta m_s$

Par conservation de la masse dans un système fermé : $m(t+dt) = m(t) \Rightarrow m_\Sigma(t) + \delta m_e = m_\Sigma(t+dt) + \delta m_s$

=> $m_\Sigma(t+dt) - m_\Sigma(t) = (dm_\Sigma/dt) \cdot dt = \delta m_e - \delta m_s \Rightarrow dm_\Sigma/dt = D_{m,e} - D_{m,s}$

En régime permanent : $dm_\Sigma/dt = 0 \Rightarrow D_{m,e} = D_{m,s}$ **Le débit de masse se conserve.**

$D_v = \delta V/dt = \delta(m/\rho)/dt = 1/\rho \cdot D_m$

Le débit de masse et le débit de volume sont proportionnels si le fluide est incompressible.

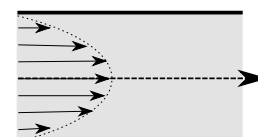
1.3. L'écoulement est unidirectionnel : la vitesse s'exprime selon \vec{e}_x .

L'écoulement est laminaire donc il ne dépend que d'un seul paramètre, la coordonnée radiale r dans une conduite cylindrique. D'où un champ de vitesse de la forme : $\vec{v} = v(r) \vec{e}_x$

Le fluide se met en mouvement dans le sens de l'axe Ox si les forces de pression en entrée sont supérieures à celle en sortie : $F_{\text{press},e} > F_{\text{press},s}$ soit $P_{(x=0)} \cdot S > P_{(x=L)} \cdot S \Rightarrow \Delta P = P_{(x=0)} - P_{(x=L)} > 0$

1.4. L'existence de frottement conduit à : $v(R) = 0$
phénomène d'adhérence aux parois

Le profil de vitesse est parabolique d'après l'expression donnée :



1.5. La vitesse varie donc on intègre entre 0 et R :

$$Q_v = \int \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int [\Delta P / 4\eta L \times (R^2 - r^2)] \cdot d(\pi \cdot r^2) = \int [\Delta P / 4\eta L \times (R^2 - r^2)] \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$Q_v = (\pi \Delta P / 2\eta L) \times \int (R^2 - r^2) r \cdot dr = (\pi \Delta P / 2\eta L) \times ([R^2 \cdot r^2 / 2] - [r^4 / 4]) = (\pi \Delta P / 2\eta L) \times R^4 / 4 = (\Delta P / 8\eta L) \cdot \pi R^4$$

Or : $Q_v = v_m \cdot S \Rightarrow v_m = Q_v / S = (\Delta P / 8\eta L) \cdot \pi R^4 / \pi R^2 = (\Delta P / 8\eta L) \times R^2$

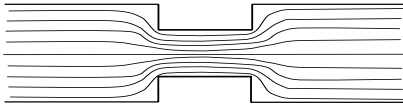
1.6. $R_{Hy} = \Delta P / Q_v = 8\eta L / \pi R^4$

1.7. $v_m = (\Delta P / 8\eta L) \times R^2 = 40 / (8 \times 6.10^{-3} \times 8.10^{-2}) \times (6.10^{-3})^2 = 0,4 \text{ m.s}^{-1}$

$$Re = \rho \cdot v_m \cdot (2R) / \eta = 1,06.10^3 \times 0,375 \times (2 \times 6.10^{-3}) / 6.10^{-3} = 8.10^2$$

L'écoulement est bien laminaire car $Re < 2\,000$. Cela valide le modèle utilisé dans l'étude.

2.1.



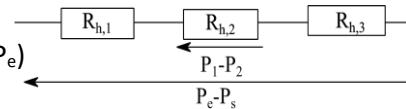
2.2. En régime stationnaire pour un fluide incompressible, le débit de volume se conserve : $Q_v = Q_1 = Q_2 = Q_3$

Or : $Q_v = v_{moy} \cdot S \Rightarrow$ Au niveau de la sténose, la section est plus faible donc la vitesse moyenne dans cette zone est plus élevée (ce qui justifie le resserrement des lignes de courant dans cette zone).

2.3. $R_{Hy_tot} = \Delta P / Q_v = (P_e - P_s) / Q_v$ Les résistances étant en série, on a : $R_{Hy_tot} = R_{Hy_1} + R_{Hy_2} + R_{Hy_3}$

2.4. Par analogie avec le pont diviseur de tension :

$$Q_v = (P_1 - P_2) / R_{Hy_2} = (P_e - P_s) / R_{Hy_tot} \Rightarrow R_{Hy_2} = R_{Hy_tot} \times (P_2 - P_1) / (P_s - P_e)$$



2.5. $R_{Hy_2} = R_{Hy_tot} \times (P_2 - P_1) / (P_s - P_e)$

Or : $R_{Hy_2} = (P_1 - P_2) / Q_2 \Rightarrow (P_1 - P_2) / Q_2 = R_{Hy_tot} \times (P_2 - P_1) / (P_s - P_e)$

$$\Rightarrow Q_2 = v_{m,2} \cdot S_2 = (P_e - P_s) / R_{Hy_tot} = (P_e - P_s) / (R_{Hy_1} + R_{Hy_2} + R_{Hy_3}) = (P_e - P_s) / (8\eta L / \pi R^2 + 8\eta L_s / \pi R_s^2 + 8\eta L / \pi R^2)$$

$$\Rightarrow v_{m,2} = (P_e - P_s) / [8\eta R_s^2 \times (2L/R^4 + L_s/R_s^4)]$$

AN : $v_{m,2} = 40 / [8 \times 6.10^{-3} \times (2.10^{-3})^2 \times (7.10^{-2} / (6.10^{-3})^4 + 1.10^{-2} / (2.10^{-3})^4)] = 0,3 \text{ m.s}^{-1}$

Dans la partie sténosée : $R_e = \rho \cdot v_{m,2} \cdot (2R_s) / \eta = 1,06.10^3 \times 0,307 \times (2 \times 2.10^{-3}) / 6.10^{-3} = 2.10^2$

Hors de la partie non sténosée : $R_e = \rho \cdot (v_m \times R_s^2 / R^2) \cdot (2R) / \eta = 6.10^1$

Dans les deux cas, l'écoulement est laminaire, ce qui valide l'utilisation de la loi de Poiseuille.

La vitesse varie au niveau d'une sténose. On peut utiliser une échographie Doppler qui permet de remonter à la vitesse. Si on relève des variations de vitesse dans l'artère alors on peut supposer une sténose

1.1. Pour un écoulement laminaire, d'un fluide visqueux newtonien, en régime permanent :

$$Q = \frac{\Delta P}{8\eta L} \times \pi R^4 \quad \text{Loi de Poiseuille}$$

1.2. $R_{Hy} = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

1.3. $Re = \frac{\mu \cdot v_{moy} \cdot (2R)}{\eta}$ Pour un écoulement de Poiseuille, le régime doit être laminaire donc $Re < 2000$.
 $\Rightarrow R = \frac{Re \cdot \eta}{2\mu \cdot v_{moy}} < 10 \text{ mm}$

1.4. Pour un écoulement permanent d'un fluide incompressible, le débit de volume se conserve :

$$Q_A = Q_1 = Q_2 = Q_B$$

$$P_A - P_B = (P_A - P_1) + (P_1 - P_2) + (P_2 - P_B) = (R_{Hy1} \cdot Q) + (R_{Hy2} \cdot Q) + (R_{Hy3} \cdot Q) = (R_{Hy1} + R_{Hy2} + R_{Hy3}) \cdot Q$$

$$\boxed{P_A - P_B = R_{Hy} \cdot Q} \quad \text{Avec } R_{Hy} = R_{Hy1} + R_{Hy2} + R_{Hy3}$$

La conservation du débit correspond ici à la conservation du débit de masse ($Q = \delta m / dt$) ; en électrocinétique, il s'agit du débit de charges soit l'intensité ($I = dq / dt$) ET le débit trouve son origine dans une inhomogénéité, ici la différence de pression (ΔP) ; en électrocinétique, la différence de potentiel (ΔV). D'où l'analogie : $\Delta P / Q \equiv \Delta V / I$.

1.5. Par analogie avec le pont diviseur de tension : $Q = \frac{(P_1 - P_2)}{R_{Hy2}} = \frac{P_A - P_B}{R_{Hy}} = \frac{P_A - P_B}{R_{Hy1} + R_{Hy2} + R_{Hy3}}$

$$\Rightarrow \boxed{(P_1 - P_2) = (P_A - P_B) \times \frac{R_{Hy1} + R_{Hy2} + R_{Hy3}}{R_{Hy}}}$$

2.1. En reprenant le travail précédent, il vient : $R_{Hy} = \frac{8\eta L}{\pi r_0^4}$ $Q = \frac{\Delta P}{8\eta L} \times (\pi r_0^4)$

2.2. $R_{Hy1} = R_{Hy3} = \frac{8\eta \frac{\ell}{3}}{\pi r_0^4} = \frac{R_{Hy}}{3}$ $R_{Hy2} = \frac{8\eta \frac{\ell}{3}}{\pi R_0^4} = \frac{R_{Hy}}{3} \times \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4$

$$Q_a = \frac{\Delta P}{R_{Hya}} = \frac{\Delta P}{R_{Hy1} + R_{Hy2} + R_{Hy3}} = \frac{\Delta P}{\left[\frac{R_{Hy}}{3} \times \left(2 + \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4\right)\right]} = 3 \cdot \frac{Q}{2 + \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4}$$

Comme $r_0 < R_0$, $Q_a > Q$: l'anévrisme provoque une augmentation du débit sanguin dans le vaisseau atteint.

En utilisant de nouveau l'analogie, du pont diviseur de tension :

$$P_{1a} - P_{2a} = \Delta P \times \left[\frac{R_{Hy2}}{\frac{R_{Hy}}{3} \cdot \left(2 + \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4\right)} \right] = \Delta P \times \frac{\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4}{2 + \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4} = \Delta P \times \frac{1}{2 \left(\frac{R_0}{r_0}\right)^4 + 1}$$

Comme $r_0 < R_0$, $P_{1a} - P_{2a} < \Delta P / 3$: la pression est plus faible au niveau de l'anévrisme et, la perte de charge entre A et B étant constante, la pression est plus importante de part et d'autre de l'anévrisme. Il y a donc un risque de rupture du vaisseau en amont ou en aval de l'anévrisme.

3.1. Comme dans le cas précédent, on a : $R_{Hs} = \frac{R_{Hy}}{3} \times \left[2 + \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4 \right] = \alpha \cdot R_{Hy}$ avec $\alpha = \frac{1}{3} \times \left[2 + \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4 \right]$
 $Q_s = \frac{3 \cdot Q}{\left(2 + \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4\right)} = \frac{Q}{\alpha}$

Avec $r_0 > R_0$, on a maintenant $\alpha > 1$ et $Q_s < Q$: la sténose provoque une diminution du débit sanguin dans l'artère.

Il en résulte une mauvaise alimentation sanguine de la zone concernée par ce vaisseau et un risque d'asphyxie.

3.2. Le flux sanguin va se répartir entre l'artère sténosée et le pontage, la même perte de charge ΔP étant imposée aux extrémités des deux « voies » : le schéma électrique équivalent est celui de deux résistances en parallèle.

On a donc : $R_{He} = \frac{1}{\frac{1}{R_{Hp}} + \frac{1}{R_{Hs}}} = \frac{R_{Hp} \cdot R_{Hs}}{R_{Hp} + R_{Hs}} = \frac{\alpha \cdot R_{Hp} \cdot R_{Hy}}{R_{Hp} + \alpha \cdot R_{Hy}}$

3.3. On veut : $R_{He} = R_{Hy} \Rightarrow \alpha \cdot \frac{R_{Hp}}{R_{Hp} + \alpha R_{Hy}} = 1 \Leftrightarrow R_{Hp} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \times R_{Hy}$

3.4. $R_{Hp} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \times R_{Hy} \Rightarrow \frac{8\eta L}{\pi r_p^4} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \times \frac{8\eta L}{\pi r_0^4} \Rightarrow r_p = r_0 \cdot \left[\frac{r_0^4 - R_0^4}{L r_0^4 + 2 R_0^4}\right]^{1/4}$

Fluide Réel 6 : CHUTE VERTICALE D'UNE BILLE

- a. $Re = \frac{\phi_{conv}}{\phi_{diff}} = \frac{\rho \cdot v_{moy} \cdot (2r)}{\eta}$ *Ecoulement laminaire car la vitesse de chute est assez lente*
- b. $\Sigma \vec{F} = P + \vec{\Pi}_A + \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_z \Rightarrow \dots \frac{dv}{dt} = \dots \Rightarrow U = \frac{2}{9} \times r^2 \times \frac{\rho' - \rho}{\eta} \times g$
- c. $U = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$
- d. $Re = 3 \cdot 10^{-3} < 2\,000 \Rightarrow$ écoulement laminaire (et même rampant !)

Si vous êtes en manque d'exercices (Cx – Couette ...), faire ceux de la planche de khôlle puisqu'inspirés de sujet de concours.