VOL D'UN AVION

On étudie le vol d'un avion, en l'absence de vent, dans le référentiel terrestre R_g supposé galiléen.

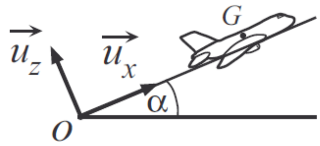
Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre d'inertie G de l'avion de masse $m = 2,3.10^3$ kg au niveau duquel seront appliquées toutes les forces. La direction de l'axe de l'avion est supposée à chaque instant confondue avec l'axe de la trajectoire du centre d'inertie G. Les forces extérieures subies sont les suivantes :

- le poids de l'avion $\vec{P}$;
- la force de traction du moteur $\overrightarrow{F_m}$ de norme F_m, de direction l'axe de l'avion, de sens celui du mouvement ;
- les forces aérodynamiques :
  - la force de portance $\overrightarrow{F_p}$ perpendiculaire au plan de l'avion qui empêche l'avion de tomber, sa norme est $F_p = ½.\rho.S.v^2.C_p$;
  - la force de trainée $\overrightarrow{F_t}$ dirigée suivant la trajectoire de l'avion qui s'oppose à son mouvement, sa norme est $F_t = ½.\rho.S.v^2.C_t$.

Avec ρ = 1,2 kg.m^{-3}, la masse volumique de l'air, S = 22 m^2, la surface des ailes projetée dans le plan horizontal, v la norme du vecteur vitesse, C_p = 0,40 et C_t = 0,060 des coefficients aérodynamiques sans dimension.

L'avion décolle en adoptant un mouvement rectiligne uniforme dont la direction fait avec l'horizontale un angle α.

On choisit le repère cartésien $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ avec l'origine O, point où l'avion quitte la piste et l'axe (Ox) ayant comme direction et comme sens, ceux du mouvement de l'avion (voir ci-contre).



1. Etudier l'influence de la vitesse et de la surface des ailes sur les normes F_p et F_t. Laquelle de ces forces possèdent la norme la plus élevée ?

2. Représenter les différentes forces s'appliquant au centre d'inertie G de l'avion et les exprimer dans la base cartésienne.

Le pilote impose au moteur une puissance constante P_m.

3. Montrer que la vitesse de l'avion peut s'écrire : $v = \sqrt{\frac{2.mg.\cos(\alpha)}{\rho.S.C_p}}$

4. La puissance du moteur est telle que $P_m = F_m \times v$; grâce à la question précédente, démontrer la relation suivante pour un angle α petit : $P_m = mg\left(\frac{C_t}{C_p} + \alpha\right).\sqrt{\frac{2.mg}{\rho.S.C_p}}$

On rappelle que pour un angle α petit (α << 1 rad), les développements limités au premier ordre donne : $\cos(\alpha) \approx 1$
$\sin(\alpha) \approx \alpha$

5. Le pilote impose une puissance $P_m = P_{max}$ = 500 kW, en déduire la valeur de l'angle α.
Conclure sur les hypothèses faites précédemment.

6. Exprimer la vitesse ascensionnelle de l'avion v_{asc}, définie comme la projection de la vitesse v suivant la verticale, en utilisant les mêmes hypothèses que celle posées a la question 4. Calculer sa valeur numérique en prenant la valeur de l'angle α obtenue précédemment.

On définit le facteur de charge η tel que : $\eta = \frac{F_p}{mg}$. Compte-tenue de la résistance des matériaux, la valeur de ce facteur ne doit pas de passer une valeur maximale η_{max} = 2.

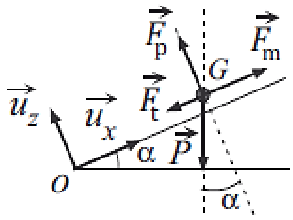
7. Exprimer le facteur de charge en phase de montée ; calculer sa valeur et commenter.

CORRECTION *Entraînement au concours_Mécanique selon un plan incliné*

1. D'après les formules, les normes F_P et F_t sont proportionnelles à S et v² : ces normes augmentent avec la vitesse et la surface des ailes.

$F_p / F_t = ½.ρ.S.v^2.C_p / ½.ρ.S.v^2.C_t = C_P/C_t = 0{,}40/0{,}060 = 6{,}7 > 1$ => $F_p > F_t$

2.



$$\vec{P} = m.\vec{g} = -m.g.\sin(\alpha).\vec{u_x} - m.g.\cos(\alpha).\vec{u_z}$$
$$\vec{F_m} = +F_m.\vec{u_x}$$
$$\vec{F_p} = +½.\rho.S.v^2.C_p.\vec{u_z}$$
$$\vec{F_t} = -½.\rho.S.v^2.C_t.\vec{u_x}$$

3. *On cherche v. PFD => a => v*

Système : {avion de masse ***m***}

Référentiel : le sol terrestre, référentiel supposé galiléen.

P.F.D : Dans un référentiel galiléen : $\sum \vec{f_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt}$

Or, d'après le bilan des forces : $\sum \vec{f_{ext}} = \vec{P} + \vec{F_m} + \vec{F_p} + \vec{F_t}$

Or, le mouvement est rectiligne et uniforme : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ => $\vec{P} + \vec{F_m} + \vec{F_p} + \vec{F_t} = \vec{0}$

Sur Ox : $-m.g.\sin(\alpha) + F_m + 0 - ½.\rho S.v^2.C_t = 0$

Sur Oz : $-m.g.\cos(\alpha) + 0 + ½.\rho S.v^2.C_p + 0 = 0$ => $v = \sqrt{\frac{2.mg.\cos(\alpha)}{\rho.S.C_p}}$

4. $P_m = F_m \times v = F_m \times \sqrt{\frac{2.mg.\cos(\alpha)}{\rho.S.C_p}}$

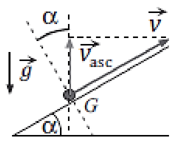
D'après la projection sur Ox : $F_m = mg.\sin(\alpha) + ½.\rho S.v^2.C_t = mg + ½.\rho S.(\frac{2.mg.\cos(\alpha)}{\rho.S.C_p}).C_t = mg \times [\sin(\alpha) + \cos(\alpha).\frac{C_t}{C_p}]$

=> $P_m = F_m \times v = mg \times [\sin(\alpha) + \cos(\alpha).\frac{C_t}{C_p}] \times \sqrt{\frac{2.mg.\cos(\alpha)}{\rho.S.C_p}} \approx mg \times [\alpha + \frac{C_t}{C_p}] \times \sqrt{\frac{2.mg}{\rho.S.C_p}}$

5. $P_m = mg \times [\alpha + \frac{C_t}{C_p}] \times \sqrt{\frac{2.mg}{\rho.S.C_p}}$ => $\alpha = \frac{P_m}{mg}.\sqrt{\frac{\rho.S.C_p}{2.mg}} - \frac{C_t}{C_p} = ... = 0{,}19$ rad = 11 °

On a bien α << 1 rad : les hypothèses faites précédemment sont valides.

6. *Il faut projeter la vitesse sur l'axe vertical :*



$v_{asc} = v \times \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{2.mg.\cos(\alpha)}{\rho.S.C_p}} \times \sin(\alpha) \approx \sqrt{\frac{2.mg}{\rho.S.C_p}} \times \alpha =$ <u>12 m.s⁻¹</u>

ou avec "v × cos(π/2 – α)"

7. $\eta = \frac{F_p}{mg} = \frac{½.\rho.S.v^2.C_p}{mg} = \frac{½.\rho.S.(\frac{2.mg.\cos(\alpha)}{\rho.S.C_p}).C_p}{mg} = \cos(\alpha) \approx 1 < 2$

Les contraintes sont acceptables pour les matériaux.