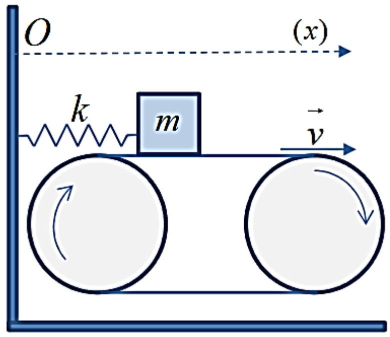
ENTRAINEMENT AU CONCOURS *Oscillateurs mécaniques*

L'OSCILLATEUR DE RELAXATION « STICK-SLIP » : UN MODELE SIMPLE EN GEOPHYSIQUE

G2E 2021 (30min)

Le coulissement entre deux plaques lithosphériques (faille *transformante*) peut être modélisé en première approximation par le dispositif suivant : un objet considéré comme *ponctuel*, de masse *m*, est posé sur un tapis roulant entraîné à une vitesse $\vec{v}$ constante (par rapport au sol, considéré comme « fixe »). Cet objet, qui est choisi comme « système », est également relié à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur *k*. La position du centre de l'objet est repérée par son abscisse *x* (axe horizontal). A l'instant $t = 0$, le ressort n'est pas tendu (il n'exerce aucune force sur ses extrémités), et l'abscisse de la masse est notée x_0 (c'est la longueur à vide du ressort).



1. On constate que tant que l'intensité de la force de traction $\vec{T}$ exercée par le ressort ne dépasse pas une valeur T_{max}, l'objet reste « collé », c'est-à-dire fixe par rapport au tapis.
   Exprimer alors la loi horaire *x(t)* durant cette phase. Ecrire une relation simple entre la force de frottement $\vec{F}$ exercée par le tapis sur l'objet et la force $\vec{T}$ exercée par le ressort. Justifier. En déduire la norme *F(t)* de la force exercée par le tapis sur l'objet.

Par contre dès que $\|\vec{T}\|$ atteint la valeur T_{max}, l'objet « se décolle » et on considère qu'il glisse sans frottement sur le tapis : $\vec{F}$ s'annule, et l'objet n'est plus soumis qu'à l'action du ressort.

2. A quel instant t_1 (à exprimer en fonction de T_{max}, *k* et *v*) l'objet décolle-t-il du tapis ? A quelle équation différentielle obéit la position *x(t)* de cet objet dans la phase qui suit ?

3. Justifier que l'on peut écrire la solution de cette équation différentielle sous la forme :
   $x(t) = x_0 + A.\sin[\omega_0.(t-t_1) + \alpha]$ où *A*, ω_0 et α sont des constantes. Exprimer ω_0 en fonction de *k* et de *m*. En tenant compte des conditions initiales, exprimer $\tan(\alpha)$ en fonction de ω_0 et t_1, et *A* en fonction de *v*, t_1 et ω_0.

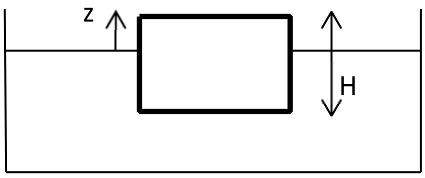
4. Lorsque la vitesse de la masse par rapport au tapis s'annule à nouveau, la force de frottement $\vec{F}$ réapparaît. A quel instant t_2 cela se produit-il ? (Exprimer t_2 en fonction de t_1, α et ω_0). Vérifier qu'à cet instant, la longueur du ressort vaut $x(t_2) = x_0 - A\sin\alpha$.

5. La masse est alors de nouveau entraînée par le tapis à vitesse constante *v*. A quel instant t_3 décolle-t-elle à nouveau ? Représenter graphiquement l'allure du mouvement périodique de la masse *x(t)*. Exprimer sa période *T* en fonction de ω_0, α, *A* et *v*.

OSCILLATIONS D'UN FLOTTEUR A LA SURFACE D'UN BASSIN *G2E 2017* *(30min)*

Partie A :

Un flotteur cylindrique de masse volumique μ flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e. Le niveau supérieur du flotteur est repéré par sa cote z par rapport au niveau de la surface de l'eau.



On suppose que le diamètre D du flotteur est très grand devant sa hauteur H, de façon à éviter tout basculement. On négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air sur la partie émergée du flotteur. On néglige aussi tout frottement dans cette question. On suppose le bassin de volume suffisamment grand pour négliger les variations du niveau de l'eau.

A1. Exprimer la position d'équilibre z_{eq}. A quelle condition le flotteur flotte-t-il effectivement ?

A2. Si on perturbe l'équilibre, il apparaît des oscillations du flotteur à la surface.
Ecrire l'équation différentielle du mouvement satisfaite par $z(t)$.
Exprimer la période T d'oscillation du flotteur ainsi que sa vitesse maximum v_{max} en fonction de l'amplitude a des oscillations et de la pulsation ω_0 des oscillations.

A3. Calculer T et v_{max} pour $\mu = 500\ kg.m^{-3}$, $H = 0{,}1\ m$ et $A = 5\ cm$.

Partie B :

Concernant le mouvement du flotteur précédent, on prend maintenant en compte une légère force de frottement fluide modélisée par $\vec{F} = -\alpha.\vec{v}$ où α est une constante.

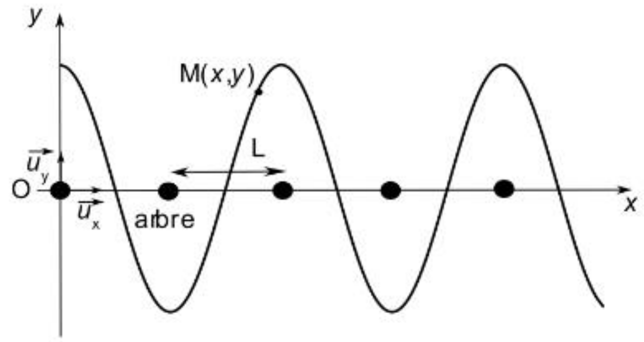
B1. On définit $Z = z - z_{eq}$. Etablir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par $Z(t)$.

B2. L'équation ayant la forme canonique : $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + {\omega_0}^2 Z = 0$, on admet sa solution :
$Z(t) = Z_0.e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}.\cos(\omega_P.t + \varphi)$ avec $\omega_P = \omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Si le facteur de qualité $Q \gg 1$ alors $\omega_P \approx \omega_0$, cas dans lequel nous nous plaçons.
Identifier les constantes ω_0 et Q et préciser leurs unités.

B3. Au bout de trois oscillations, on constate que les oscillations du flotteur ont disparu. Quel est l'ordre de grandeur du facteur de qualité ?

SLALOM A SKI DANS UNE FORET ***G2E 2023*** ***(30min)***

Afin de rejoindre le glacier, l'équipe scientifique traverse à ski une forêt. Un skieur, assimilé à un point matériel M, réalise un slalom dans une forêt où les arbres sont supposés régulièrement espacés d'une distance L = 100 m suivant l'axe Ox de la pente (voir figure ci-dessous). On note Oy la direction horizontale perpendiculaire à la pente (Ox). A t = 0, le skieur se trouve en M_0 (0, y_0). On suppose que le skieur suit une trajectoire sinusoïdale $y(x) = y_0 . \cos(kx)$ et qu'il conserve à tout moment une vitesse dont la composante suivant Ox est constante : $\dot{x} = v_0$ = 30 km.h^{-1}. On s'intéresse ici à l'étude cinématique du mouvement du skieur, décrivant une trajectoire sinusoïdale :



1. Exprimer k en fonction de L.

2. Exprimer $x(t)$ puis $y(t)$.

3. En déduire l'expression de la période temporelle T des oscillations du skieur en fonction de L et de v_0. Faire l'application numérique sur T.

4. Donner les expressions des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du skieur sur la base cartésienne $(\vec{u}_x, \overrightarrow{u_y})$.

5. Pour que le skieur reste debout, il doit avoir une accélération inférieure à 0,7g où g = 9,8 m.s^{-2} est l'accélération de la pesanteur. Quelle est alors l'amplitude maximale $y_{0,max}$ que peut adopter le skieur sans chuter ? Faire l'application numérique sur $y_{0,max}$.

a) On considère un système assimilable à un point matériel M (masse m, accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vid ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un support fixe e un point O. La longueur du ressort est $\ell = OM$.

Figure 1

L'ensemble est horizontal et posé sur un plan sur lequel M peut glisser (Figure 1). Tous les frottements sont négligés. La position de M est repérée par son abscisse x comptée à partir de la position où le ressort est au repos. À partir de l'expression de la force de rappel du ressort, établir l'expression de l'énergie potentielle élastique de M.

b) Tracer l'allure du graphe de l'énergie potentielle élastique de M en fonction de x. En déduire les positions d'équilibre possibles et leur stabilité.

c) Établir l'équation du mouvement à partir de l'énergie mécanique.

d) Qu'advient-il de l'équation du mouvement du ressort si l'on considère des forces de frottement fluide modélisées par $\vec{f} = -\mu.\vec{v}$? Pour quelle condition, portant sur k, le mouvement serait-il pseudo-périodique ? La fonction x étant de la forme $x(t) = A.exp(-\alpha t).cos(\omega t + \phi)$, donner l'expression de α en fonction μ et m ainsi que l'expression de ω en fonction de μ, m et k. En déduire l'expression de la pseudo-période T du mouvement. Exprimer A et $tan\phi$ en fonction de x_0, α et ω sachant que la vitesse initiale est nulle.

e) Le système précédent est maintenant remplacé par le suivant : le système assimilable à un point matériel M masse m est astreint à glisser sans frottement sur un a Ox horizontal. Il est accroché au même ressort m l'autre extrémité de celui-ci est fixée en un point A sit à la verticale de O et à la distance fixe d de celui (Figure 2). La longueur du ressort est $\ell = AM$. La distan d vérifie la condition $d < \ell_0$. Pour ce système, le grap de l'énergie potentielle élastique en fonction l'abscisse x de M est donné à la Figure 3. L'origine de l'énergie potentielle est prise lorsque le ressort est au repos. En déduire les positions d'équilibre possibles et leur stabilité.

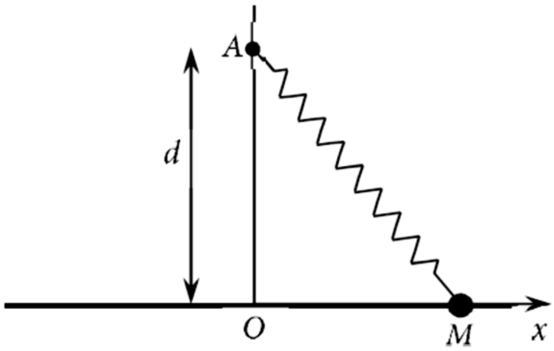


Figure 2

f) Établir l'expression de x_0, abscisse de M lorsq l'énergie potentielle est minimale (Figure 3).

g) Le système étant initialement à une abscisse x_0 avec u vitesse nulle, établir l'expression de l'énergie minima qu'il faut lui communiquer pour qu'il puisse atteinc l'abscisse $x = - x_0$. On exprimera le résultat en foncti de k, d et ℓ_0.

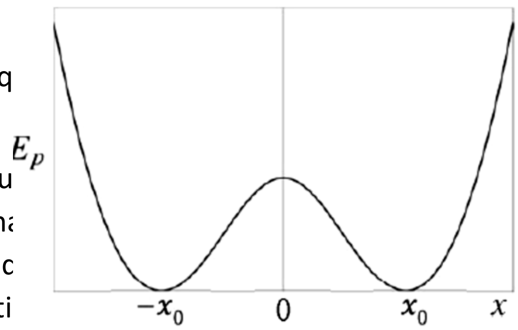
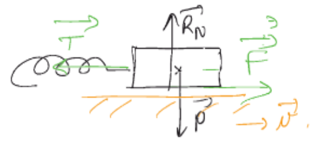


Figure 3. Énergie potentielle élastique en fonction de l'abscisse (voir texte)

CORRECTION *Oscillateurs mécaniques*

L'OSCILLATEUR DE RELAXATION « STICK-SLIP » ***G2E 2021*** ***(30min)***

1. L'objet reste « collé » au tapis, il adopte donc la même vitesse constante v.
D'où : $x(t) = v.t + x_0$



{objet, m} référentiel : sol, supposé galiléen

Bilan des forces : $\vec{P} = m.\vec{g}$ $\vec{R} = -\vec{P}$ $\vec{T}$ $\vec{F}$

PFD : $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a}$ => $m.\vec{a} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{T} + \vec{F}$

La vitesse est constante donc l'accélération est nulle : $\vec{T} = -\vec{F}$

$||\vec{T}|| = ||-\vec{F}||$ => F = T *avec $T = k.(x - x_0)$* On en déduit donc : $F = k.(x - x_0) = k.v.t$

2. L'objet décolle quand $T = T_{max}$ => $F(t_1) = k.v.t_1 = T_{max}$ => $t_1 = T_{max} / k.v$

Après t_1, en reprenant l'étude précédente, sur Ox, on a : $\ddot{x} + (k/m).x = (k/m).x_0$

3. On dispose de l'équation d'un oscillateur harmonique :
$x(t) = A.\sin(\omega_0(t - t_1) + \alpha) + x_0$ avec φ la phase à l'origine et $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ la pulsation propre.

Pour déterminer les constantes, on considère les conditions initiales :

$x(t_1) = A.\sin(\alpha) + x_0 = v.t_1 + x_0$ => $A(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = A = v \times \sqrt{(t_1^2 + 1/\omega_0^2)}$

$\dot{x}(t_1) = A.\omega_0.\cos(\alpha) = v$ => $x(t_1)/ \dot{x}(t_1) = \tan\alpha = \omega_0.t_1$

4. *On cherche quand $\dot{x}(t_2) = v$* => $\dot{x}(t_2) = v \times \sqrt{(t_1^2 + 1/\omega_0^2)} \times \omega_0.\cos(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = v$

$\cos(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) = 1 / (\omega_0 \times \sqrt{(t_1^2 + 1/\omega_0^2)}) = 1 / \sqrt{(\omega_0^2.t_1^2 + 1)} = 1 / \sqrt{(\tan^2\alpha + 1)} = \cos(\alpha)$

$\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha = 2\pi + \alpha = 2\pi - \alpha$ *Il faut conserver α dans l'expression comme demander*

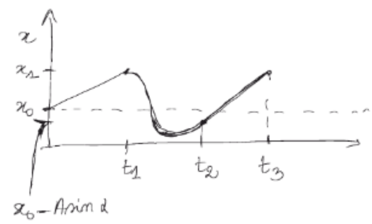
$t_2 = t_1 + (2\pi - 2\alpha)/\omega_0$

=> $x(t_2) = A.\sin(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha) + x_0 = A.\sin(2\pi - \alpha) + x_0 = x_0 - A.\sin(\alpha)$

5. *Dernière question, il nous faut souvent tout reprendre :*
Nouveau décollage si $F(t_3) = T_{max}$

=> $k.(x(t_3) - x_0) = k.([x(t_2) + v.(t_3 - t_2)] - x_0) = k.([x_0 - A.\sin(\alpha) + v.(t_3 - t_2)] - x_0) = T_{max}$

=> $t_3 = t_2 + (T_{max}/k + A.\sin\alpha) \times 1/v$



$T = t_3 - t_1 = (t_3 - t_2) + (t_2 - t_1) = (T_{max}/k + A.\sin\alpha) \times 1/v + (2\pi - 2\alpha)/\omega_0$

$T = t_1 + (A.\sin\alpha) \times 1/v + (2\pi - 2\alpha)/\omega_0 = \tan\alpha/\omega_0 + A.\sin\alpha/v + (2\pi - 2\alpha)/\omega_0$

OSCILLATIONS D'UN FLOTTEUR A LA SURFACE D'UN BASSIN *G2E 2017* *(30min)*

A1. {flotteur, m} référentiel : surface de la mer, supposé galiléen

Bilan des forces : $\vec{P} = m.\vec{g} = \mu.Sh.\vec{g}$ $\quad \vec{\Pi} = -\rho_e.V_{imm}.\vec{g} = -\rho_e.s(H-z).\vec{g}$

A l'équilibre : $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ => $\vec{0} = \mu.S.H.\vec{g} - \rho_e.S.(H - z_{éq}).\vec{g}$

$z_{éq} = H.(1 - \mu/\rho_e)$ Le flotteur flotte effectivement si $z_{éq} > 0$ soit si $\mu < \rho_e$.

A2. Hors l'équilibre : $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m.\ddot{z}.\overrightarrow{u_z} = (\mu.S.H).\ddot{z}.\overrightarrow{u_z} = -\mu.S.H.g.\overrightarrow{u_z} - \rho_e.S.(H-z).(-g).\overrightarrow{u_z}$

=> $\ddot{z} + \frac{\rho_e.g}{\mu.H}.z = \frac{(\rho_e - \mu)}{\mu}.g = \left(\frac{\rho_e}{\mu} - 1\right).g$

$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi.\sqrt{(\frac{\mu.H}{\rho_e.g})}$

$z(t) = A.\cos(\omega_0.t + \varphi)$ => $\dot{z}(t) = -A.\omega_0.\sin(\omega_0.t + \varphi)$ => $v_{max} = A.\omega_0$

A3. <u>T = 0,4 s</u> <u>$v_{max} = 0,7\ m.s^{-1}$</u>

B1. $\ddot{z} + \frac{\alpha}{\mu.S.H}\dot{z} + \frac{\rho_e.g}{\mu.H}.z = \left(\frac{\rho_e}{\mu} - 1\right).g$ => $\ddot{z} + \frac{\alpha}{\mu.S.H}\dot{z} + \frac{\rho_e.g}{\mu.H}.(z - z_{éq}) = 0$

=> $\ddot{Z} + \frac{\alpha}{\mu.S.H}\dot{Z} + \frac{\rho_e.g}{\mu.H}.Z = 0$

B2. $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0.Z = 0$ *avec* $\omega_0 = .\sqrt{(\frac{\rho_e.g}{\mu.H})}$ & $Q = \frac{m.\omega_0}{\alpha}$

B3. Q ≈ 3 = équivalent au nombre d'oscillations dès que $\omega_P \approx \omega_0$ ce qui est donné d'après l'énoncé.

SLALOM A SKI DANS UNE FORET *G2E 2023* *(30min)*

1. La fonction $x \mapsto y = y_0 \cos(kx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{k}$. Or d'après le schéma la période vaut aussi 2L. Donc $\frac{2\pi}{k} = 2L$ soit $k = \frac{\pi}{L}$

2. La vitesse horizontale est constante $\dot{x} = v_0$ donc $x(t) = v_o.t + cste$ par intégration

Or en t=0 le mobile a une abscisse nulle donc $x(t) = v_o.t$

On injecte dans l'expression de y : $y(t) = y_0.\cos(kv_0t)$

3. On reconnait une fonction temporelle sinusoidale de période $T = \frac{2\pi}{kv_0} = \frac{2L}{v_0} = \frac{200}{30\ 10^3/3600} = 24\ s$

4. Par définition la vitesse du skieur dans le référentiel $\mathcal{R}$ de la forêt est $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt})_{\mathcal{R}}$.

En cartésiennes, le vecteur vitesse $\vec{v}$ se décompose en $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$. On dérive par rapport au temps les lois horaires, ainsi : $\vec{v} = v_0\vec{e}_x - y_0kv_0 \sin(kv_0t)\vec{e}_y$

Par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt})_{\mathcal{R}}$. On dérive donc le vecteur précédent par rapport au temps:

$$\vec{a} = -y_0(kv_0)^2 \quad \cos(kv_0t)\,\vec{e}_y$$

5. On calcule la norme de l'accélération $a = y_0(kv_0)^2 \quad |\cos(kv_0t)|$. Au maximum elle vaut $a_{max} = y_0(kv_0)^2 \quad = y_0(\frac{\pi}{L}v_0)^2$

La condition a<0.7g est vérifiée dès que $y_0(\frac{\pi}{L}v_0)^2 < 0.7\ g$ soit

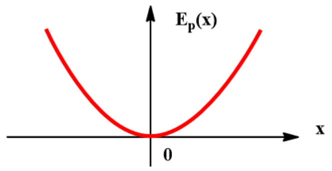
$y_0 < \frac{0.7g}{(\frac{\pi}{L}v_0)^2}$. On a donc $y_{0,max} = \frac{0.7g\ L^2}{(\pi v_0)^2} = 100$ m

ENERGIE POTENTIELLE *Agro 2015* *(40min)*

2.1.a. $\overrightarrow{F_k} = -k.(\ell - \ell_0).\overrightarrow{e_x} = -k.(x).\overrightarrow{e_x}$

$E_p = \int dE_p = -\int \overrightarrow{F_k}.\overrightarrow{d\ell} = -\int(-kx.\overrightarrow{e_x}).(dx.\overrightarrow{e_x}) = \int k.x.dx = ½.k.x^2$ *avec* $E_p(\ell_0) = 0$

2.1.b. *avec* $k > 0$



$(dE_p/dx) = kx$ La dérivée s'annule pour $x = 0$

$(d^2E_p/dx^2) = k > 0$ La dérivée seconde est positive.

<u>$x = 0$</u> constitue la seule <u>position d'équilibre stable</u>.

2.1.c. Le système n'est pas soumis à de forces non conservatives donc l'énergie mécanique se conserve dans un référentiel galiléen : $dE_m/dt = 0 = d(E_c + E_p)/dt = ½.m.(2.\dot{x}.\ddot{x}) + k.(2.x.\dot{x}) = 0$

=> <u>$\ddot{x} + (k/m).x = 0$</u>

2.1.d. En présence de forces de frottement fluide, on obtient : <u>$\ddot{x} + (\mu/m).\dot{x} + (k/m).x = 0$</u>

Le mouvement est pseudo-périodique si $\Delta = (\mu/m)^2 - 4(k/m) < 0$ => <u>$k > \mu^2/4m$</u>

$x(t) = A.\exp(-\mu/2m \times t).\cos((-\sqrt{(\Delta)}/2m).t + \phi)$ => <u>$\alpha = \mu/2m$</u> & <u>$\omega = -\sqrt{(\Delta)}/2 = \sqrt{(k/m - (\mu/2m)^2)}$</u>

$T = 2\pi / \omega$ $= 2\pi / \sqrt{(k/m - (\mu/2m)^2)}$

$x_0 = A.\cos(\phi)$ => <u>$A = x_0 / \cos\phi = x_0.[\pm\sqrt{(1+(\alpha/\omega)^2)}]$</u>

$(dx/dt)_0 = -A.(\alpha.\cos(\phi) + \omega.\sin(\phi)) = 0$ => <u>$\tan\phi = -\alpha/\omega$</u>

2.1.e. Les positions d'équilibre sont visibles lorsque la tangente à la courbe est horizontale (dérivée nulle) en $x = -x_0 ; 0 ; +x_0$.

Les minimums locaux d'énergie correspondent à des équilibres stables en $x = -x_0$ et $x = +x_0$.

Le maximum local en $x = 0$ correspond à un équilibre instable.

2.1.f. L'allongement du ressort se fait selon la direction AM : $\ell = \sqrt{d^2 + x^2}$

L'énergie potentielle vaut alors : $E_p = ½.k.(\ell-\ell_0)^2 = ½.k(\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0)^2$

$(dE_p/dx) = ½.k.[\, 2.(\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0).(\frac{2x}{2\sqrt{d^2+x^2}})\,] = k.(\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0).(\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}})$

$(dE_p/dx) = 0$ <=> $(x = 0)$ OU $(\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0 = 0)$ => $x = \pm\sqrt{{\ell_0}^2 - d^2} = \pm x_0$

2.1.g. Pour passer de l'abscisse x_0 à l'abscisse $x = -x_0$, il faut lui fournir l'énergie pour franchir la barrière potentielle en $x = 0$: soit $E_{p(0)} = ½.k(\sqrt{d^2 + 0} - \ell_0)^2 = ½.k(d - \ell_0)^2$