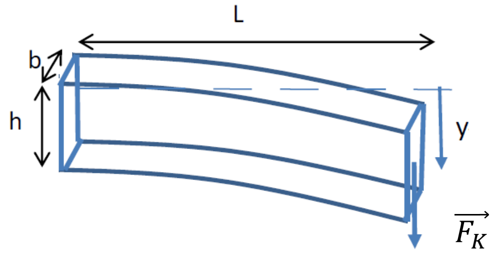
Physique 1 : Oscillations forcées d'une branche sous l'effet du vent

Le bois est un matériau à la fois résistant et souple : on peut le déformer sans le casser, il est élastique.

On modélise une branche rectiligne horizontale, que l'on suppose encastrée dans le tronc d'un arbre et de masse *M*, comme une poutre de section rectangulaire de largeur *b*, de hauteur *h* et de longueur *L*. La section de la poutre a une aire *S* = *bh*.
Au repos la branche est horizontale, on ne tient pas compte de son poids. Quand on applique une force verticale transverse *Fy* à son extrémité libre, celle-ci est déformée et son extrémité se déplace verticalement dans la direction verticale de *y* déplacement que l'on appelle la flèche. On admettra que : $\overrightarrow{F_K} = -K.y.\overrightarrow{u_y}$.
Les phénomènes dissipatifs ne sont pas négligeables : on les modélise par une force proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = -\lambda.\frac{\mathrm{d}y}{dt}.\overrightarrow{u_y}$.



Les rafales du vent que l'on modélise comme périodiques et sinusoïdales comme si l'extrémité de la branche subissait une force d'expression $\vec{F} = F_0.\cos(\omega.t)\,.\overrightarrow{u_y}$.

1. Exprimer l'énergie potentielle élastique associée à la constante de raideur K du ressort équivalent à la branche.

2. L'énergie mécanique de la branche en vibration est-elle constante au cours du temps ?

3. Retrouver l'équation différentielle du mouvement de l'extrémité de la branche y en exprimant ω_0, Q et A en fonction de M, K, λ et F_0 :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2.y = A.\cos\,(\omega.t)$$

4. On s'intéresse à la solution en régime critique d'oscillations amorties.

a. Retrouver la valeur du facteur de qualité Q en régime critique.

b. Écrire la solution analytique, en faisant intervenir deux constantes d'intégration. Qu'est-ce qui détermine ces constantes ?

5. Donner, en la justifiant, l'unité de la quantité A.

6. On cherche une solution sous la forme $y = y_0.\cos(\omega t + \varphi)$. Donner l'expression de y_0 en fonction de A, ω, ω_0 et Q.

7. Peut-on voir un phénomène de résonance apparaître ?

CORRECTION — *Oscillations mécaniques forcées*

Physique 1 : Oscillations forcées d'une branche sous l'effet du vent — *G2E18 (30min)*

1. $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.y^2$

2. La vibration se fait en présence de frottements donc l'énergie mécanique de la branche en vibration n'est pas constante au cours du temps.

3. {branche, M} par rapport au tronc, référentiel supposé galiléen

Bilan des forces : *On néglige le poids de la branche*

$$\vec{f} = -\lambda.\frac{dy}{dt}.\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{F_K} = -K.y.\overrightarrow{u_y}$$

$$\vec{F} = F_0.\cos(\omega.t).\overrightarrow{u_y}$$

Principe fondamental de la dynamique : $\boldsymbol{\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M.\frac{d\vec{v}}{dt}}$

=> $$M.\frac{d\vec{v}}{dt} = M.\frac{dv}{dt}.\overrightarrow{u_y} = M.\frac{d^2y}{dt^2}.\overrightarrow{u_y} = \left(-\lambda.\frac{dy}{dt}.\overrightarrow{u_y}\right) + \left(-K.y.\overrightarrow{u_y}\right) + \left(F_0.\cos(\omega.t).\overrightarrow{u_y}\right)$$

Sur Oy : $$M.\frac{d^2y}{dt^2} = \left(-\lambda.\frac{dy}{dt}\right) + (-K.y) + (F_0.\cos(\omega.t))$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{\lambda}{M}\right).\frac{dy}{dt} + \left(\frac{K}{M}\right).y = \frac{F_0}{M}.\cos(\omega.t)$$

D'où : $$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{dy}{dt} + \omega_0^2.y = A.\cos(\omega.t)$$ *avec* $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ $Q = \sqrt{MK}/\lambda$ $A = F_0/M$

4.a. Le régime critique s'obtient lorsque le discriminant de l'équation caractéristique s'annule :

« $r^2 + (\omega_0/Q).r + \omega_0^2 = 0$ » => $\Delta = (\omega_0/Q)^2 - 4.\omega_0^2 = 0$ <=> $Q = \frac{1}{2}$

4.b. $y(t) = (\alpha.t + \beta).e^{-(\omega_0/2Q).t}$

α et β sont déterminées par les conditions initiales « $y(0)$ » et « $dy/dt(0)$ ».

5. $\dim[A] = \dim[F_0]/\dim[M] = \dim[M.dv/dt]/\dim[M] = M.L.T^{-2} / M = L.T^{-2}$ A s'exprime en « $m.s^{-2}$ ».

6. *Pour faciliter le calcul de dérivée, on passe aux complexes avec* « $\underline{y} = y_0.e^{i(\omega t+\varphi)} = \underline{y_0}.e^{i(\omega t)}$ ».

=> $$\frac{d^2\underline{y}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{d\underline{y}}{dt} + \omega_0^2.\underline{y} = A.e^{i(\omega t)}$$

$$\underline{y_0}.(-\omega^2).e^{i(\omega t)} + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right).\underline{y_0}.(i\omega).e^{i(\omega t)} + (\omega_0^2).\underline{y_0}.e^{i(\omega t)} = A.e^{i(\omega t)}$$

$$\underline{y_0}.(-\omega^2) + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right).\underline{y_0}.(i\omega) + (\omega_0^2).\underline{y_0} = A$$

$$\underline{y_0} = \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\left(\omega.\frac{\omega_0}{Q}\right)} \quad => \quad y_0 = |\underline{y_0}| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\omega.\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

7. Le phénomène de résonance apparaît si y_0 admet un maximum (*pour $\omega \neq 0$*) donc si le dénominateur de y_0 admet un minimum (*le numérateur A est indépendant de ω*) :

$$\left(\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\omega.\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}\right)' = \frac{1}{2}.\frac{(2.(\omega_0^2-\omega^2).(-2\omega) + 2\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2.\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\omega.\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

La dérivée s'annule si : $2(\omega_0^2 - \omega)(2\omega) = 2(\omega_0/Q)^2.\omega$ <=> $\omega^2 = \omega_0^2.(1 - 1/2Q^2)$

ω n'existe que s'il est positif donc si $Q > 1/\sqrt{2}$.

Or, en régime critique, $Q < 1/2$. Comme $1/2 < 1/\sqrt{2}$, le phénomène de résonance ne peut pas être observé !