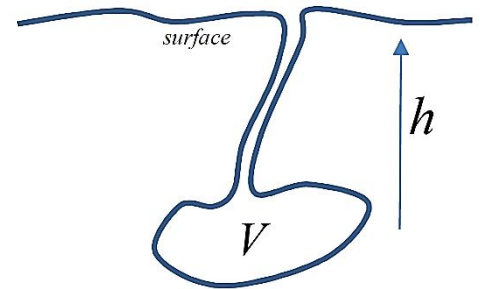


**Le geyser : un oscillateur de relaxation en thermodynamique**

Un oscillateur de relaxation est un système qui oscille indéfiniment et périodiquement entre deux états d'énergie. Leur évolution n'est pas sinusoïdale et nécessite une source d'énergie extérieure. On s'intéresse ici à un oscillateur de relaxation en thermodynamique.

Un geyser est constitué d'une cavité souterraine de volume  $V$  située approximativement à une profondeur  $h$  sous la surface terrestre, à laquelle il est relié par un conduit. Le tout est rempli d'eau liquide, de masse volumique  $\rho = 1,00 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$  supposée ici indépendante de la température et de la pression. La température de surface vaut  $T_0 = 300 \text{ K}$  et le gradient géothermique vaut  $\gamma = 1,00 \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$  (c'est-à-dire que la température de la roche et de l'eau du geyser augmente de  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  lorsqu'on descend de 1 mètre). La pression atmosphérique vaut  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . On admet que la vapeur d'eau, même saturante, se comporte ici comme un gaz parfait. La masse molaire de l'eau vaut  $M = 18,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .



1. Donner l'allure de la courbe de saturation, que l'on nommera, associée à l'équilibre liquide vapeur dans le diagramme  $(P, V)$ . Placer le point critique  $C$  et les domaines d'existence du liquide, de la vapeur, et du mélange liquide vapeur. Représenter sur ce graphique une isotherme à une température  $T$  inférieure à la température critique. Qu'appelle-t-on pression de vapeur saturante à la température  $T$  ? Que vaut la pression de vapeur saturante de l'eau à  $T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$  ?
2. Dans la suite on verra que  $h$  est de l'ordre de 200 mètres. Déterminer la pression correspondante  $P(h)$  dans la cavité, l'eau dans le geyser étant liquide et immobile. Si de la vapeur se forme dans la cavité, quel est son volume molaire  $v_G$  ? Comparer le volume molaire  $v_L$  de l'eau liquide à celui du gaz  $v_G$ .

On admet que l'enthalpie de vaporisation (ou chaleur latente)  $L$  obéit à l'équation de Clapeyron :

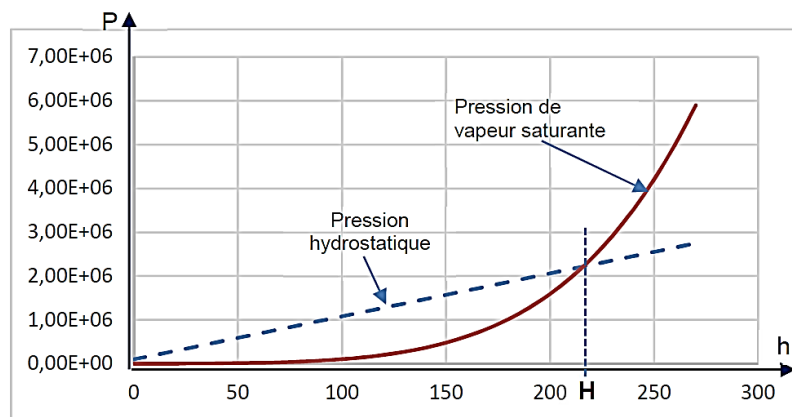
$L = T \cdot (v_G - v_L) \cdot \frac{dP_{v,sat}}{dT}$ . Dans cette expression,  $P_{v,sat}$  est la pression de vapeur saturante, qui ne dépend que de la température  $T$ . Dans la suite on néglige  $v_L$  devant  $v_G$ , et on considère  $L$  comme une constante.

3. Montrer qu'avec les approximations faites, l'expression  $P_{v,sat}(T) = A \cdot e^{-\frac{L}{RT}}$  est solution de l'équation de Clapeyron, où  $A$  est une constante.

On rappelle que la température d'ébullition de l'eau vaut,  $T_{éb,atm} = 373 \text{ K}$  à la pression atmosphérique  $P_0$ . On mesure  $L = 40,0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

4. En déduire la valeur numérique de la constante  $A$  avec trois chiffres significatifs (vérifier que  $A$  est proche de  $4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ).

Sur le graphe ci-dessous, on a représenté la pression de vapeur saturante et la pression hydrostatique (en Pascal) en fonction de la profondeur (en mètres).



Dans le cas d'un geyser, l'ébullition se produit d'abord dans la cavité (ce qui explique la grande quantité de vapeur formée). On note  $H$  la profondeur à laquelle la pression  $P$  de l'eau dans la cavité coïncide avec la pression de vapeur saturante  $P_{v,sat}$  à la température imposée par le gradient géothermique.

5. Comparer la profondeur  $h$  de la cavité du Geyser à  $H$ . Justifier. Pour une profondeur comprise entre 0 et  $H$ , le potentiel chimique  $\mu_V$  de l'eau vapeur est-il inférieur ou supérieur à celui  $\mu_L$  de l'eau liquide ? Ecrire l'équation permettant en principe de calculer  $H$ . La solution numérique de cette équation est  $H = 217$  m.

Dans la suite on supposera que la profondeur  $h$  de la cavité vaut exactement  $H$ . Dès le début de l'ébullition dans la cavité, les bulles remontent dans le conduit et expulsent rapidement l'eau qui s'y trouvait. Le conduit ne contient alors quasiment plus que de la vapeur d'eau et de l'air, et la pression dans la cavité passe subitement à la pression atmosphérique, alors que la température  $T$  de l'eau y est encore égale à celle de la roche environnante. Cette situation éloignée de l'équilibre conduit à une intensification soudaine de l'ébullition de toute l'eau de la cavité. On note  $c = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$  la capacité thermique massique de l'eau liquide, supposée indépendante de la température,  $m$  la masse d'eau contenue dans la cavité, et  $m_V$  la masse de vapeur produite à chaque éruption du geyser. On mesure  $m_V = 44,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$ . On néglige tout transfert de chaleur avec la roche pendant l'éruption. Pour déterminer  $m$ , on admet que l'on peut appliquer la relation approximative suivante :

$mc\Delta T + n_V \cdot L = 0$ , où  $n_V$  est la quantité de matière de vapeur formée et  $\Delta T = T_{\text{éb,atm}} - T_{\text{géo}}(h)$  représente l'écart de température de l'eau liquide entre la température d'ébullition à la pression atmosphérique et sa valeur initiale dans la cavité.

6. Proposer une interprétation simple de cette relation. En déduire les valeurs de la masse  $m$  et du volume  $V$  de la cavité.
7. On assimile la cavité à une sphère et on suppose qu'après éruption du geyser, la cavité se remplit rapidement avec de l'eau froide à la température  $T_f = 300 \text{ K}$  qui se mélange à l'eau chaude restante. Quelle est la température de l'eau dans la cavité juste après le remplissage ?

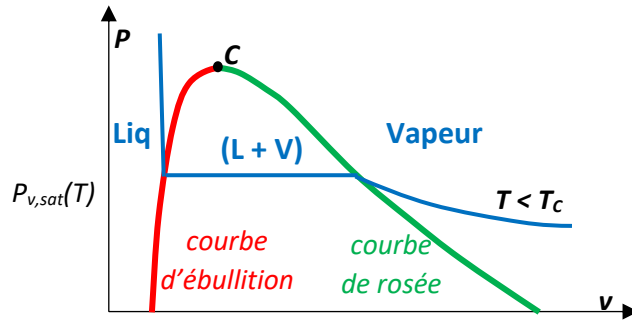
**Le geyser : un oscillateur de relaxation en thermodynamique**

**(G2E 2021)**

1.

La pression de vapeur saturante  $P_{v,sat}$  correspond à la pression pour laquelle l'équilibre liquide-vapeur s'instaure à la température T.

$$P_{v,sat}(H_2O, 100 \text{ }^\circ\text{C}) = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = P_0$$



2. On considère un axe Oz descendant dont l'origine se trouve à la surface de la Terre.

L'eau étant liquide et immobile dans toute la colonne et la cavité,

on peut utiliser la relation fondamentale de la statique des fluides :  $\frac{dP}{dz} = +\rho g$

$$\text{D'où : } \int_{z=0}^{z=h} \left(\frac{dP}{dz}\right) \cdot dz = \int_{z=0}^{z=h} +\rho g \cdot dz \Rightarrow P_{(z=h)} = P(h) = P_0 + \rho g h$$

$$\text{AN : } P_{(200m)} = 1,013 \cdot 10^5 + 1,00 \cdot 10^3 \times 9,81 \times 200 = \underline{20,6 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

Dans le cas d'un gaz parfait :  $v_G = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P} = \frac{R(T_0 + \gamma \cdot z)}{P}$  *en considérant le gradient de température*

$$\text{AN : } v_{G(200m)} = \frac{R(T_0 + \gamma \cdot h)}{P} = \frac{8,314 \times (300 + 1,00 \times 200)}{20,6 \cdot 10^5} = \underline{2,02 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible :  $v_L = \frac{V}{n} = \frac{m/\rho}{n} = \frac{M}{\rho}$

$$\text{AN : } v_L = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{1,00 \cdot 10^3} = \underline{18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}} \ll v_G$$

Le volume molaire du liquide est négligeable devant celui du gaz.

$$3. L = T \cdot (v_G - v_L) \cdot \frac{dP_{v,sat}}{dT} \approx T \cdot (v_G) \cdot \frac{dP_{v,sat}}{dT} = T \cdot \left(\frac{R \cdot T}{P_{v,sat}}\right) \cdot \frac{dP_{v,sat}}{dT} = \frac{R \cdot T^2}{P_{v,sat}} \cdot \frac{dP_{v,sat}}{dT} \Rightarrow \frac{dP_{v,sat}}{P_{v,sat}} = \frac{L}{R} \cdot \frac{dT}{T^2}$$

$$\text{En intégrant, on trouve : } \ln P_{v,sat} = \frac{L}{R} \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) + cste$$

$$\text{Soit : } P_{v,sat}(T) = e^{-\frac{L}{RT} + cste} = e^{cste} \cdot e^{-\frac{L}{RT}} = A \cdot e^{-\frac{L}{RT}}$$

$$4. A = \frac{P_{v,sat}(T)}{e^{-\frac{L}{RT}}} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{e^{-\frac{40,0 \cdot 10^3}{8,314 \times 373}}} = \underline{4,05 \cdot 10^{10} \text{ Pa}}$$

5. D'après les données :  $h = 200 \text{ m} < H = 217 \text{ m}$

Tant que la pression du liquide reste supérieure à la pression de vapeur saturante alors l'eau reste liquide.

Le liquide étant plus stable, son potentiel chimique est plus faible. Pour  $z < H$  :  $\mu_L < \mu_G$

$$\text{Au point H, il y a égalité des pressions : } P_{v,sat}(T) = P_{hydro} \Rightarrow \underline{A \cdot e^{-\frac{L}{RT}} = P_0 + \rho g h}$$

6. Soit le système constitué par toute l'eau de masse  $m$  contenue dans la cavité.

La transformation se fait sous pression extérieure constante  $P_0$  entre deux états d'équilibre.

D'après le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique (sys. fermé au repos macro.) :  $\Delta H_{sys} = \Sigma W^* + \Sigma Q$

Or, il n'y a pas de travail autre et on néglige tout transfert thermique avec la roche de la cavité.

D'où :  $\Delta H_{sys} = 0$

Par ailleurs :  $\Delta H_{sys} = \Delta H_{eau\ liquide} + \Delta H_{eau\ vaporisée}$

En considérant la quantité d'eau vaporisée négligeable devant celle d'eau liquide dans la cavité, il

vient :  $\Delta H_{sys} = \Delta H_{eau\ liq.} + \Delta H_{eau\ vap.} = mc \cdot \Delta T + n_v \cdot L$

On retrouve bien l'équation donnée.

L'eau liquide dans la cavité subit une transformation adiabatique sous pression constante entre deux états d'équilibre : le système n'échange pas d'énergie avec l'extérieur ( $\Delta H_{sys} = 0$ ). Donc toute l'énergie emmagasinée par l'eau liquide au contact de la roche chaude ( $mc \cdot \Delta T$ ) conduit à une vaporisation partielle de l'eau ( $n_v \cdot L$ ).

Avec la relation, on a :  $m = -\frac{n_v \cdot L}{c \cdot \Delta T} = -\frac{\left(\frac{m_v}{M}\right) \cdot L}{c \cdot (T_{éb,atm} - (T_0 + \gamma H))} = -\frac{\left(\frac{44,0 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-3}\right) \times 40,0 \cdot 10^3}{4,18 \cdot 10^3 \times (373 - (300 + 217 \times 1,00))} = \underline{162 \cdot 10^3 \text{ kg}}$

D'où :  $V = \frac{m}{\rho} = \frac{162 \cdot 10^3}{1,00 \cdot 10^3} = \underline{162 \text{ m}^3}$

7. Soit l'eau restante dans la cavité de masse  $m - m_v$  à 373 K et l'eau à 300 K de masse  $m_v$

La transformation se fait sous pression extérieure constante  $P_0$  entre deux états d'équilibre.

D'après le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique pour un système fermé et au repos macroscopique :

$$\Delta H_{sys} = \Sigma W^* + \Sigma Q$$

Or, il n'y a pas de travail autre et on néglige tout transfert thermique avec la roche de la cavité.

D'où :  $\Delta H_{sys} = 0$

Par ailleurs :  $\Delta H_{sys} = \Delta H_{eau\ 300K} + \Delta H_{eau\ 373K} = (m - m_v)c \cdot (T_{éq} - T_{éb,atm}) + m_v \cdot c \cdot (T_{éq} - T_f)$

$$\Rightarrow T_{éq} = \frac{(m - m_v)c \cdot (T_{éb,atm}) + m_v \cdot c \cdot (T_f)}{(m - m_v)c + m_v \cdot c} = \frac{(m - m_v) \cdot (T_{éb,atm}) + m_v \cdot (T_f)}{m} = \frac{(162 \cdot 10^3 - 44,0 \cdot 10^3) \times 373 + 44,0 \cdot 10^3 \times 300}{162 \cdot 10^3} = \underline{353 \text{ K}}$$